١١

بسم الله الرحمن الرحيم



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفرع الأدبي والشرعي

فريق التأليف:

أ. سامر أبو الرُب (منسقاً)　　أ. منال الصبَّاغ　　أ. ياسر الساحلي



أ. قيس شبانة　　أ. نسرين دويكات

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧ / ٢٠١٨م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائـــرة الفنية

الإشراف االإداري والفني	أ. كمال فحماوي

التحكيم العلمي	د. عمر غنام
التحـرير اللغوي	د. سهير القاسم
متابعة المحافظات الجنوبية	د. سمية النخالة

الطبعة الثالثة
٢٠٢٠م/ ١٤٤١ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com
هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250
https://www.facebook.com/Palestinian.MOEHE/
moehe.gov.ps | mohe.pna.ps | mohe.ps

تـقـديـم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقرّرة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٧

مـقـدمـة

تُعد المرحلة الثانوية (١١-١٢) آخر مراحل التعليم المدرسي حيث تشهد أَهم التّغيّرات التي يمرّ فيها الطالب وترسُم معالم شخصيته مستقبلاً، وفيها يكتسب المعارف و الخبرات الأَساسية، وفي الوقت نفسه يتمتع بحياة اجتماعية سليمة ليكون عضواً فاعلاً يواكب المستجدات في المجالات العلمية والتكنولوجية بما يخدم المجتمع.

وتلعب العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة دوراً كبيراً في تمكين الطلبة من المعارف والمهارات والخبرات باكتشاف المعرفة وتوظيفها في حلّ المشكلات الحياتية، واتخاذ قرارات ذات علاقة بواقع حياتهم اليومية، مما يُسهم في تحسين نوعية التعليم والتعلم وصولاً إِلى طلبة باحثين مبدعين ومنتجين.

وتُعدّ الرياضيات من المقررات التي تخاطب عقل الطالب وتنمّي فيه مهارات متنوعة وتكسبه المقدرة على التعامل المنطقي مع محيطه ومن حوله، حيث تعتمد على الفهم والتطبيق أَكثرمن الحفظ والتذكر؛ وبذلك تؤدي إِلى تمكين الطالب من اكتساب معارف ومهارات واتجاهات وقيم تساعده في تنمية ذاته ومجتمعه، من خلال معرفته بمحيطه المادي والبشري وبالأَنظمة المعرفية المختلفة، وحلّ ما يواجهه من مشكلات دراسية وعلمية في حاضره ومستقبله.

وقد تضمّن هذا الكتاب أَنشطة منظمة للمفاهيم والمعارف التي تُحاكي السياقات الحياتية الواقعية وتمكنها ضمن أَنشطة معروضة بسياقات حياتية واقعية، تُحاكي البيئة الفلسطينية وخصوصيتها وتركّز على التّعلم النشط مُراعية لقدرات الطلبة وحاجاتهم، إذ تتاح أَمامهم الفرص لتبادل الخبرات من خلال المناقشة والحوار والعمل الجماعي وبالإِفادة من وسائل تكنولوجية لتوظيفها في البحث عن المعلومات وتوظيفها بما يحقق التّعلم الفعّال.

يتكوّن هذا الكتاب من أَربع وحدات دراسية، تناولت الأُولى المعادلات والمتباينات وتطبيقات البرمجة الخطية، وتخصصت الثانية في الإِحصاء والاحتمال لتعريف الطلبة بمناهج البحث العلمي والعينات الإِحصائية والتجارب العشوائية ذات الحدين. وتناولت الثالثة المتتاليات الحسابية والهندسية، أَما الوحدة الرابعة فتناولت النهايات والاتصال لتعريف الطلبة بنهاية الاقتران عند نقطة وكذلك اتصال الاقترانات.

وأَخيراً نتمنى أَن نكون قد وُفقنا في إِنجاز هذا الكتاب لما فيه خير لأَولادنا ولفلسطين العزيزة.

فريق التأليف

المحتويات

الوحدة ١	**المعادلات والمتباينات**		
	١ – ١	حلّ معادلة خطيّة بمتغير واحد	٤
	١ – ٢	حلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين	٧
	١ – ٣	حلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين باستخدام الرسم البياني	١٢
	١ – ٤	حلّ نظام من معادلتين: إحداهما خطية، والأُخرى تربيعيّة	١٥
	١ – ٥	حلّ نظام من متباينتين خطيتين بمتغيرين بيانياً	١٨
	١ – ٦	تطبيقات عمليّة (البرمجة الخطيّة)	٢٢
الوحدة ٢	**الإحصاء والاحتمالات**		
	٢ – ١	البحث العلمي	٣٢
	٢ – ٢	العينات الإحصائية	٣٤
	٢ – ٣	المتغيّر العشوائيّ	٤١
	٢ – ٤	توقّع المتغير العشوائي المنفصل	٤٦
	٢ – ٥	التجارب العشوائية ذات الحدين	٥٠
الوحدة ٣	**المتتاليات**		
	٣ – ١	المتتاليات	٥٨
	٣ – ٢	المتتالية الحسابية	٦٣
	٣ – ٣	المتتالية الهندسية	٦٨
الوحدة ٤	**النهايات والاتصال**		
	٤ – ١	نهاية الاقتران	٧٨
	٤ – ٢	قوانين النهايات	٨٢
	٤ – ٣	نهاية اقتران متعدد القاعدة	٨٨
	٤ – ٤	الاتصال	٩١

الوحدة

١

المعادلات والمتباينات



ماذا لو تساوت درجات الحرارة
على سطح الكرة الأَرضيّة؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المعادلات والمتباينات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ حلّ معادلة خطية بمتغير واحد.
٢ حلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين بطرائق عديدة.
٣ حلّ نظام من معادلتين إحداهما خطيّة والأُخرى تربيعيّة.
٤ حلّ نظام من متباينات خطيّة بمتغيرين.
٥ توظيف حلّ المتباينات في مشكلات حياتيّة (البرمجة الخطيّة).

«يتطلب تحقيق المساواة بين الناس المشاركة والتعاون في بناء مؤسسات الوطن .. إنها مسؤولية الجميع».

١ - ١ حلّ معادلة خطيّة بمتغير واحد

Solving a Linear Equation With One Variable

نشاط ١: المسجد الإبراهيميّ من أَهم المعالم التَّاريخيَّة والدّينيّة في فلسطين. ارتبطت باسمه إِحدى مجازر الاحتلال الصهيوني حيث راح ضحيتها ١٨٠ مُصلياً ما بين شهيد وجريح.



أَجِدُ عدد شهداء وجرحى المجزرة إِذا علمت أَن عدد الجرحى يساوى خمسة أَمثال عدد الشهداء.

أفرض أَن عدد شهداء المجزرة س شهيد.

إِذن عدد جرحى المجزرة بدلالة س = _____.

عدد شهداءالمجزرة وجرحاها بدلالة س يكون ٦ س. لماذا؟

عدد شهداء المجزرة = _____.

عدد جرحى المجزرة = _____.

نشاط ٢: يزيد ثمن صندوق عنب قباطية عن ثمن صندوق عنب غزة بمقدار دينارين، وثمن ثلاثة صناديق من عنب غزة يساوي ١٨ ديناراً، أَجدُ ثمن الصندوق الواحد لكل منهما.

إِذا كان ثمن صندوق عنب غزة = س دينار.

أُكمل الجدول الآتي:

	الثّمن بدلالة س	الثّمن بالدّينار
ثمن صندوق عنب غزة	س	
ثمن ٣ صناديق عنب غزة		١٨
ثمن صندوق عنب قباطية		

تعريف: المعادلة الخطيّة بمتغير واحد: هي معادلة يمكن كتابتها على الصورة

أ س + ب = صفر ، حيث أَن أ ، ب ∋ ح ، أ ≠ صفر.

نشاط ٣: أُكملُ الجدول الآتي:

المعادلة	نوع المعادلة	حل المعادلة الخطيّة بمتغير واحد
أ) ٧س – ١١ = ٣	خطيّة بمتغير واحد	بإضافة النظير الجمعي للعدد $^{-}$١١ لطرفي المعادلة ينتج: ٧س = ١٤ بضرب الطرفين بالنظير الضربي للعدد ٧ ينتج: س = ٢
ب) $\frac{٥}{س}$ – ٧ = ٠	غير خطيّة. لماذا؟	
جـ) ٣س + ٥ = $^{-}$٤		
د) $\frac{س}{٣}$ – ٤ = $^{-}$٢		
هـ) س + ٥ص = ١٠		

نشاط ٤: إِذا علمتَ أَن قاعدة مبنى المسجد القبلي الواقع جنوبي المسجد الأَقصى، مستطيلة الشكل، ويزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٥ متراً، فإِذا كان محيطها = ٢٧٠ متراً، فما بُعْديّ القاعدة؟



أفرض أَن طول القاعدة = س متر.

عرض القاعدة بدلالة س = _____.

بما أَن محيط القاعدة = ٢٧٠ متراً.

٢((س – ٢٥) + س) = ٢٧٠، لماذا؟

إِذن طول القاعدة: س = ٨٠ متراً. عرض القاعدة: _____.

نشاط ٥: انطلقت سيارتان في الساعة الثامنة صباحاً، الأُولى من مدينة أُمّ الرشراش باتجاه مدينة طبريا بسرعة ٧٠كم/ ساعة، والثانية انطلقت من مدينة طبريا باتجاه مدينة أُمّ الرشراش بسرعة ٨٠ كم/ ساعة.

أَحسبُ بعد السيارة عن مكان انطلاقها من مدينة طبريا في لحظة التقاء السيارتين. علماً أن المسافة بين المدينتين حوالي ٤٥٠ كم.



أفرض أن الزمن اللازم حتى تلتقي السيارتان = ن ساعة.

المسافة التي قطعتها السيارة الأُولى بدلالة ن = _____.

المسافة التي قطعتها السيارة الثانية بدلالة ن = _____.

إذن ٧٠ ن + ٨٠ ن = ٤٥٠. لماذا؟

ن = _____.

تلتقي السيارتان في تمام الساعة _____.

بُعْد السيارة عن مكان انطلاقها من مدينة أُمّ الرشراش = ٢١٠ كم.

بُعْد السيارة عن مكان انطلاقها من مدينة طبريا = _____.

تمارين ومسائل ١ - ١:

١ أُميّز المعادلة الخطية بمتغير واحد مما يأَتي:

أ) س + ٣ = ص

ب) س - ١ = ٤س

جـ) س^{٢} - ١ = صفر

د) ص = ٤س

هـ) س ص = ٩

و) س = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٣}$

٢ أحِلّ المعادلات الآتية:

أ) ٢س - ٣ = ٩

ب) ٧(س - ٣) = ٢٨

جـ) س - ٤ = ٢س - ٦

د) ٣(س - ٥) = ٤ - (س + ٣)

٣ طول محمد يساوى ٣ أَرباع طول أَحمد، والفرق بين طوليهما ٤٠ , ٠ متر، أَحسب طول كل منهما.

٤ رجل عمره أَربعة أَمثال عمر ابنه، فإذا كان مجموع عمريهما ٥٠ سنة، فما عمر كل من الأَب وابنه؟

٥ يزيد طول مستطيل عن عرضه بمقدار ٤ سم، إِذا كان محيطه = ١٢ سم، أَجِدْ بُعْديّه.

٦ **أفكر** : عدد إِذا أُضيف إِليه مثله ونصفه ونصف نصفه + ١ = ١٠٠، أَجِدْ العدد.

١ - ٢ حلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

Solving a System of Tow Linear Equations With Two Variables

أولاً : طريقة التعويض:



نشاط ١: تشكّلت المخيمات الفلسطينيّة بسبب التطهير العرقي الذي مارسته العصابات الصهيونية، حيث توزعت هذه المخيمات ما بين فلسطين وخارجها.

إذا كان عدد المخيمات في فلسطين والأُردن ٣٧ مخيماً، وكان عدد المخيمات في فلسطين يساوي ٣ أَضعاف عدد المخيمات في الأُردن مطروحاً منه العدد ٣.

أَحسب عدد المخيمات في كل من فلسطين والأُردن.

أفرض أَن عدد المخيمات في فلسطين س مخيم، وعدد المخيمات في الأُردن ص مخيم.

عدد المخيمات في فلسطين والأُردن يساوي ٣٧ مخيماً.

إِذن س + ص = ٣٧

عدد المخيمات في فلسطين ٣ أَضعاف عدد المخيمات في الأُردن مطروحاً منه العدد ٣.

منها س = _____.

ينتج أَن ٤ص = ٤٠. لماذا؟

عدد المخيمات في الأُردن ص = _____.

عدد المخيمات في فلسطين س = _____.

أتعلم: نظام المعادلات الخطيّة: مجموعة من المعادلات الخطيّة، لها المتغيرات نفسها، ويتمثّل حلّ النظام الخطي في إِيجاد القيم العددية لمتغيراته حيث تتحقق معادلاته جميعها في آن واحد.

مثال ١ : أَحِلُ نظام المعالادت الآتية:

ص – س = ٣

س + ٢ص = ٧

الحل : أَجعل أَحد المتغيرين موضوع القانون وليكن ص في المعادلة ص – س = ٣

إذن ص = ٣ + س

أُعوِّضُ قيمة ص في المعادلة س + ٢ص = ٧

س + ٢(٣ + س) = ٧

٣س + ٦ = ٧

س = $\frac{١}{٣}$. لماذا؟

ص = ٣ + $\frac{١}{٣}$ = ٣ $\frac{١}{٣}$

إذن حلّ النّظام ($\frac{١}{٣}$ ، ٣ $\frac{١}{٣}$)

نشاط ٢: أَحِلّ النظام الآتي باستخدام طريقة التّعويض:

٢س + ٥ ص = $^{-}$١

ص – ٣ س = ١٠

أُرقِّم المعادلات:

٢س + ٥ ص = $^{-}$١ ..... (١)

ص – ٣س = ١٠ .....(٢)

أجعل ص في المعادلة (٢) موضوع القانون فتكون ص = ٣س + ١٠

أُعوِّضُ قيمة ص في المعادلة (١) فينتج:

٢س + ٥ (_____) = $^{-}$١

إذن س = $^{-}$٣ . لماذا؟

أُعوِّضُ قيمة س في إِحدى المعادلتين

ومنها: ص = _____ .

إذن حلّ النّظام (_____ ، _____).

أَتحقق من صحة الحلّ.

نشاط ٣: إذا كان مجموع ثمن تذكرة اللّعبة الإلكترونية وثمن تذكرتين للّعبة العادية في مدينة أَلعاب يساوي ٤ دنانير، وكان ثمن تذكرتين للعبة الإلكترونية يزيد عن ثمن تذكرة لعبة عادية بمقدار ٣ دنانير. فما سعر كلّ من التّذكرتين: العادية والإلكترونية؟

أفرض أَن ثمن تذكرة اللعبة الإلكترونية = س دينار، وثمن تذكرة اللعبة العادية = ص دينار.

ينتج النظام الآتي:

س + ٢ص = ٤ ..... (١)

٢س – ص = ٣ ..... (٢)

أجعل س موضوع القانون في المعادلة (١)، فتكون س = _____ .

أُعوِّضُ قيمة س في المعادلة (٢) فينتج:

٢(٤ – ٢ص) – ص = ٣

ص = _____ .

س = _____ .

إذن حلّ النّظام (_____ ، _____).

أَتحقق من صحة الحلّ.

هل هناك طرق أُخرى لحلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين؟

ثانياً : طريقة الحذف:

تتلخص هذه الطريقة في التّخلص من أَحد المتغيرين وصولاً إِلى معادلة بمتغير واحد.

مثال : أحِلّ النظام الآتي بطريقة الحذف:

٢ س – ٣ ص = –٩

–س + ٣ ص = ٦

الحل : أُرقِّم المعادلات:

٢س – ٣ص = – ٩ ..... (١) (بالجمع)

–س + ٣ ص = ٦ ..... (٢)

ينتج أَن قيمة س = –٣ . لماذا؟

أُعوِّض عن قيمة س = –٣ في المعادلة (٢) فينتج:

–(–٣) + ٣ ص = ٦

إِذن ص = ١

إِذن حلّ النظام (–٣ ، ١)

أَتحقق من صحة الحلّ.

نشاط ٥: قدّم محل لبيع السّمك في غزة عرضاً لـــ٥ كيلوغرام من سمك السردين مع ٢ كيلوغرام من سمك البوري بـ ١١ ديناراً . و٣ كيلوغرام من سمك السردين مع ٤ كيلوغرام من سمك البوري بـ ١٥ ديناراً. أَحسب ثمن الكيلوغرام الواحد لكل نوع.

أفرض أَن ثمن كيلوغرام السردين = س دينار وثمن كيلوغرام سمك البوري = ص دينار

ينتج النظام الآتي:

٥ س + ٢ ص = ١١ ..... (١).

٣ س + ٤ ص = ١٥ ..... (٢). لماذا؟

أضرب المعادلة (١) في العدد ٢، ينتج:

١٠س + ٤ ص = ٢٢ (بالطرح)

٣س + ٤ ص = ١٥

ينتج أن قيمة س = ١ . لماذا؟

إذن ص = _____ .

إذن ثمن كيلوغرام السردين = _____ .

و ثمن كيلوغرام سمك البوري = _____ .

أتحقق من صحة الحلّ.

تمارين ومسائل ١ - ٢:

١ أَحِلّ أَنظمة المعادلات الآتية بطريقة التّعويض:

أ ص = ٢ س + ٧

٣ س + ٢ ص = ٧

ب ٤ س + ٢ ص = ٨

٣ س + ٣ ص = ٩

٢ أَحِلّ أَنظمة المعادلات الآتية بطريقة الحذف:

أ س + ص = ١٠

س – ص = ٤

ب ٥ م – ب = ٧

٧ م – ب = ١١

٣ عددان مجموعهما ٢٢ والفرق بينهما ١٢ . أَجِدْ كلاً من العددين.

٤ **أفكر** : إذا كان عدد الأَسرى في سجن مجدو عام ٢٠٠٩م يزيد عن عدد أَسرى سجن نفحة بـ ٦٤٠ أَسيراً، وكان عدد الأَسرى في السجنين هو ٢٢٤٠ أَسيراً، فما عدد الأَسرى في كل من السجنين في العام نفسه؟

١ - ٣ حلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين باستخدام الرسم البياني

Solving a System of Two Linear Equations With Two Variables Using The Graph

نشاط ١: غزة مدينة فلسطينية ساحلية تقع في الطرف الجنوبي للسّاحل الشرقي من البحر الأَبيض المتوسط، وتعدّ من أَكثر مدن العالم كثافة بالسُّكان.



(ب)



(أ)

أتأمل الشكلين المجاورين اللذين يمثلان صورتين جويتين لشوارع مدينة غزة.

في أَي شكل يُمكن أَن يحدث تصادم بين السيارات المارة في الشوارع المستقيمة الموضحة باللونين الأَخضر والأَحمر؟ أُفسِّر إِجابتي.

نشاط ٢: أَحِلّ النّظام الآتي باستخدام الرسم البيانيّ:

ص = س + ١

٢ س + ص = ٤

لرسم المستقيم الأَول ص = س + ١ أُكملُ الجدول الآتي:

س	٠		٥
ص		٠	

بالطريقة نفسها أَرسم المستقيم الثاني

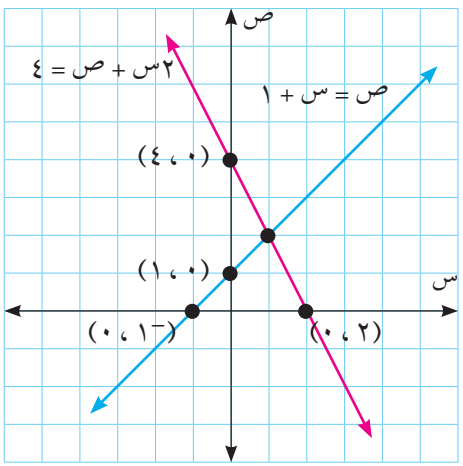
٢ س + ص = ٤

هل النقطة (٠ ، ٤) تُمثل حلاً للنظام؟

أُلاحظ في الشكل المجاور أَنّ النقطة (١، ٢)

تُمثّل حلّ النظام، لماذا؟

أَتحقق من صحة الحلّ.



نشاط ٣: أَحِلّ النّظام الآتي باستخدام الرسم البياني:

ص = س – ٢

–٣س – ٣ص = صفر

لرسم المستقيم الأَول ص = س – ٢، أُكمل الجدول الآتي:

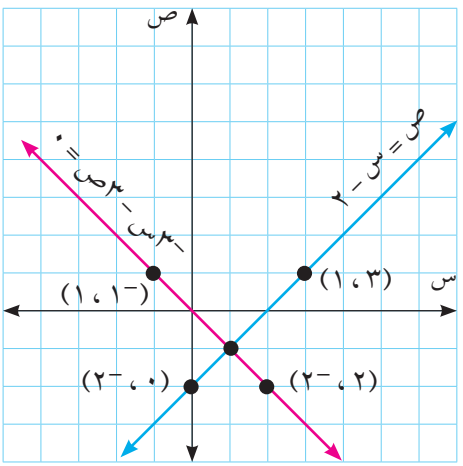
س	٠		١
ص		٠	

بالطريقة نفسها أرسم المستقيم الثاني

–٣ س – ٣ ص = صفر.

من الرسم البياني في الشكل المجاور النقطة التي تمثل حل النظام: (ـــــ ، ـــــ)

أَتحقق من صحة الحلّ.



أتعلم: إِذا تقاطع مستقيمان في نقطة مثل (س ، ص) فإِن هذا الزّوج المرتب يعدّ حلاً للمعادلتين الخطيتين معاً.

نشاط ٤: أَحِلّ النظام الآتي بيانياً:

ص = ٢س + ١

٤ س – ٢ ص = ٦

أَرسم المستقيم الأَول ص = ٢س + ١

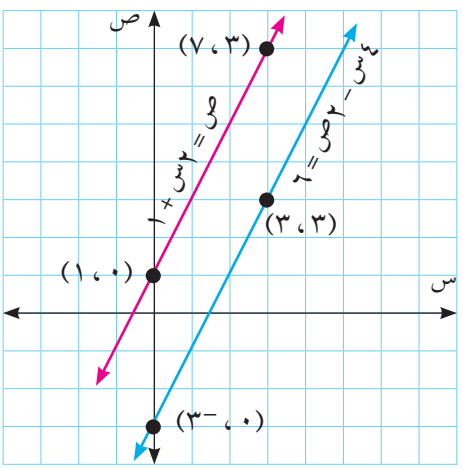
س	٠	٣	
ص			٠

بالطريقة نفسها أَرسمُ المستقيم الثاني

٤ س – ٢ ص = ٦

أُلاحظ الرسم في الشكل المجاور.

هل يوجد حل للنظام؟ أُفسِّر إِجابتي.



أتعلم: إذا توازى خطان مستقيمان فإن مجموعة حلّ النظام Ø.

نشاط ٥: أَحِلّ النظام الآتي بيانياً:

س + ص = ٥

٢س + ٢ص = ١٠

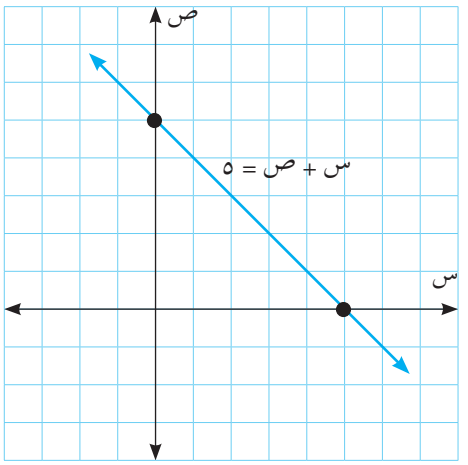
يمثل الشكل المجاور التمثيل البياني للمعادلة

س + ص = ٥.

أرسم المستقيم ٢س + ٢ص = ١٠

على المستوى الديكارتي نفسه.

من الرسم حلّ النّظام يكون : _____.



أتعلم: إذا تطابق مستقيمان فإن الأَزواج المرتبة الواقعة على المستقيمين جميعها تمثّل مجموعة حلّ النّظام.

تمارين ومسائل ١ - ٣:

١ أحِلّ أَنظمة المعادلات الآتية بيانياً:

أ) ص = ٢ س + ٢

٢ س + ص = ٤

ب) ٢ س – ص = ١

س – ٢ ص = ٨

جـ) ٢ س + ٨ص = -١٢

٣ س – ٦ص = ٦

د) ص = ٢ س – ٢

٢ ص – ٤ س – ١ = صفر

٢ إذا كان ثمن ٤ حقائب مدرسية و ٨ أَحذية رياضية يساوي ٥٦ ديناراً. وثمن ٥ حقائب مدرسية و٤ أَحذية رياضية يساوي ٤٠ ديناراً. أُكوِّن معادلتين خطيتين ثم أَجب عن الأَسئلة الآتية:

أ) أمثل المعادلتين بيانياً مُستخدماً محور السينات ليمثِّل ثمن الحقائب المدرسية، ومحور الصادات ليمثل ثمن الأَحذية الرياضية.

ب) ما ثمن ٤ حقائب مدرسية و ٦ أَحذية رياضية؟

١ - ٤ حلّ نظام من معادلتين: إحداهما خطية، والأُخرى تربيعيّة

Solving a System of Two Equations, One Linear and The Other Quadratic

نشاط ١: في الشكل الآتي مخطط لملعب كرة القدم، هناك ثلاثة لاعبين يتدربون على تمريرة مستقيمة للكرة فيما بينهم.

أرسم الخطوط التي تمثّل التمريرات جميعها فيما بينهم.

- التمريرة بين النقطتين: ب ، جـ قطعت الدائرة في نقطة واحدة.
- التمريرة بين النقطتين: أ ، جـ قطعت الدائرة في _____.
- التمريرة بين النقطتين: أ ، ب قطعت الدائرة في _____.



نشاط ٢: إذا كانت: $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ معادلة دائرة

وكانت: $٣س - ٤ص = ٠$ معادلة خط مستقيم.

تقع النقطة (٤ ، ٣) على الدائرة لأَن : $٤^{٢} + ٣^{٢} = ٢٥$

تقع النقطة (٤ ، ٣) على الخط المستقيم لأَن: _____.

إِذن النقطة (٤ ، ٣) تُمثّل حل نظام من معادلتين إِحداهما تربيعية:

$س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ والأُخرى خطيّة: $٣س - ٤ص = ٠$

أُبيّن أَي من النقطتين الآتيتين:

(−٤ ، −٣)، (٤ ، −٣) تُمثّل حلاً للنظام السابق.

مثال : أَحِلّ النظام الآتي جبرياً:

ص – س = ١

س^{٢} + ص = ١٣

الحل : ص – س = ١ ..... (١)

س^{٢} + ص = ١٣ ..... (٢)

أجعل ص في المعادلة (١) موضوع القانون فينتج:

ص = ١ + س ..... (٣)

أُعوِّضُ قيمة ص في المعادلة (٢) فيكون:

س^{٢} + (١ + س) = ١٣

س^{٢} + س – ١٢ = ٠

إذن س = -٤ أو س = ٣

أُعوِّض س = -٤ و س = ٣ في المعادلة الخطية (١) فيكون:

عندما س = -٤ فإن ص = -٣. لماذا؟

عندما س = ٣ فإن ص = ٤

إذن حلّ النّظام (-٤ ، -٣) ، (٣ ، ٤)

نشاط ٣: عددان حقيقيان مجموعهما ٧ والفرق بين مربعيهما = ٧ ، فما قيمة العددين؟

أفرض أَن العدد الأَول = س ، والعدد الثاني = ص.

أُعبّر عن مجموع العددين = ٧ فيكون:

س + ص = ٧ ..... (١).

أُعبّر عن الفرق بين مربعي العددين = ٧ فيكون:

س^{٢} – ص^{٢} = ٧ ..... (٢).

أَجعلُ س في المعادلة (١) موضوع القانون فينتج:

س = _____.

أُعوِّض عن قيمة س في المعادلة (٢) فيكون:

$(٧ - ص)^{٢} - ص^{٢} = ٧$

إذن ص = _____.

س = _____.

أَتحقّقُ من صحة الحلّ.

تمارين ومسائل ١ - ٤:

١ أَيّ النقاط الآتية: $(-٣ ، ١)$ ، $(-١ ، ٣)$ ، $(٣ ، -١)$، تمثّل حلاً للنظام:

$س^{٢} - ص^{٢} = ٨$

$س + ص = ٢$

٢ أَحِلّ الأَنظمة الآتية من المعادلات:

أ $س - ص = ٢$

$٢س^{٢} - ٣ص^{٢} = ١٥$

ب $٣س^{٢} - ص^{٢} = ٣$

$٢س + ص = ١$

٣ مستطيل محيطه ٢٤ سم، ومساحته ٢٠ سم^{٢}، أَجِدْ بعديه.

٤ يتقاطع طريق دوار مع طريق مستقيم، فإِذا كانت معادلة الطريق الدوار هي:

$س^{٢} + ص^{٢} - ٨س - ٦ص + ٢١ = ٠$

ومعادلة الطريق المستقيم: $ص = س + ١$

أَجِدْ نقطة / نقاط تقاطع الطريقين.

١ - ٥ حلّ نظام من متباينتين خطيتين بمتغيرين بيانياً

Solving a System Of Two Linear Variations With Two Variables Using The Graph

أولاً: حل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً:

نشاط ١: يافا عروس البحر، وبوابة فلسطين الغربية يقصدها السّياح من داخل فلسطين وخارجها لمشاهدة الأَماكن الأَثرية والتاريخية. أَراد مهندس في المدينة تصميم خريطة لمنتجع سياحي على شاطئ البحر يتكون من جزأين: الأَول لمبنى مطعم والآخر لفندق سياحي، حيث يكون مجموع مساحتي مبنى المطعم، وضعفا مساحة مبنى الفندق أَقلَ من ٨ دونمات.



أَفرض أن مساحة مبنى الفندق س دونم.

أَفرض أَن مساحة مبنى المطعم ص دونم.

المتباينة التي تحدد مساحة المطعم وضعفي مساحة الفندق بحيث يكون مجموع مساحتيهما أَقل من ٨ دونمات، هي:

ص + ٢س < ٨

لحلّ المتباينة ص + ٢س < ٨ بيانياً:

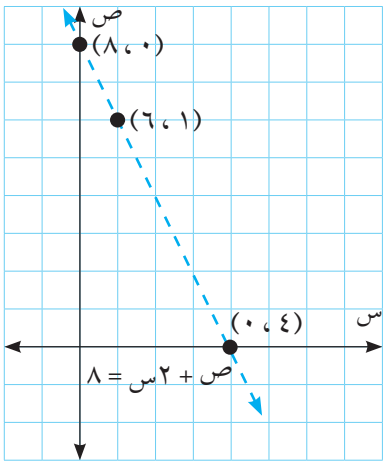
س	٠	١	٤
ص			

١ أرسم الخط المستقيم ص + ٢س = ٨

٢ أُلاحظ أَن الخطّ المستقيم متقطعٌ. لماذا؟

الخطّ المستقيم ص + ٢س = ٨ يقسم المستوى إِلى منطقتين:

إِحداهما تمثّل مجموعة الحلّ للمتباينة.



٣ أَختارُ نقطة اختبار وأظلل* المنطقة الممثلة للحلّ في الشكل المجاور ولتكن النقطة (٠ ، ٠).

أُعوِّضُ النقطة في المتباينة ٠ + ٢ × ٠ < ٨ ،

النقطة (٠ ، ٠) تنتمي إِلى مجموعة حلّ المتباينة.

أُظللُ المنطقة التي تقع فيها النقطة (٠ ، ٠).

- هل النقط (٥ ، ٢) ، (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٣) تنتمي لمجموعة الحل؟
- أَكتبُ ثلاث نقاط تنتمي لمجموعة حلّ المتباينة.
- النقطة (٣ ، −٢) رغم وقوعها في منطقة الحلّ لكنها تُرفض. لماذا؟

* ملاحظة للمعلم: تكون منطقة الحلّ هي المنطقة المظللة، ويمكن للمعلم اعتبار عكس ذلك (منطقة الحل هي المنطقة غير المظللة والمنطقة المظللة لا تمثّل الحلّ).

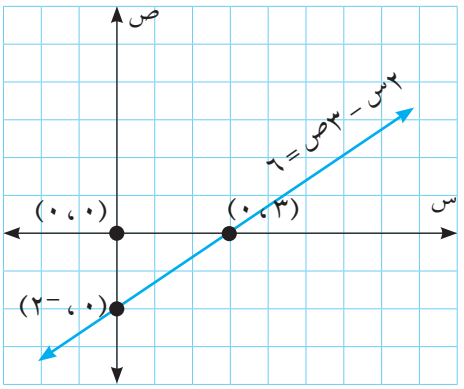
تعريف: **مجموعة حل المتباينة من الدرجة الأُولى في متغيرين هي مجموعة الأَزواج المرتبة (س ، ص) جميعها والتي تحقق المتباينة حيث س، ص عددان حقيقيان.**

نشاط ٢: لديك المتباينة الآتية: ٢س – ٣ص ≤ ٦

لتمثيل مجموعة حلّ المتباينة:

١ أرسمُ الخطّ المستقيم ٢س – ٣ص = ٦

س	٣	٠	
ص			١,٥



٢ أُلاحظ أَن الخطّ المستقيم متصل، لماذا؟

الخطّ المستقيم ٢س – ٣ص = ٦

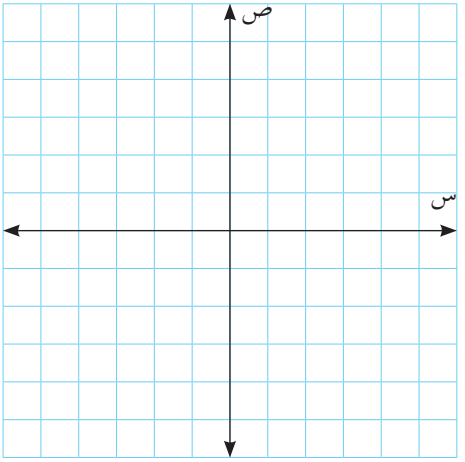
يقسم المستوى إِلى منطقتين إِحداهما تمثل مجموعة الحل للمتباينة.

٣ أَختارُ نقطة اختبار ولتكن: _____ ، وأُظلل المنطقة الممثلة للحلّ في الشكل المجاور.

أَكتبُ أَربع نقاط تقع في منطقة حلّ المتباينة: _____ ، _____ ، _____ ، _____ .

ثانياً: حل نظام من متباينتين خطيتين بمتغيرين:

نشاط ٣: جبل الجرمق هو أَعلى جبال فلسطين وارتفاعه ١٢٠٨ متر عن سطح البحر، فإِذا كانت درجة حرارة قمته في أَحد أَيام فصل الشتاء تتراوح من –٥ إِلى صفر درجة مئوية، وكانت درجة حرارة قمة جبل كنعان الواقع قرب مدينة صفد ويرتفع حتى ٨٤١ متراً، تتراوح من صفر إِلى ٦ درجات مئوية.



أفرض أَن س تمثّل درجة حرارة قمة جبل الجرمق،

و ص تمثّل درجة حرارة قمة جبل كنعان.

متباينة درجة حرارة قمة جبل الجرمق:

–٥ ≤ س ≤ .

متباينة درجة حرارة قمة جبل كنعان: _____.

أُمثِّل على المستوى الديكارتي نفسه حل كل من المتباينتين.

أُلاحظُ التمثيل البياني ومنه أُحدد منطقة الحل المشتركة.

نشاط ٤: أُمثِّلُ بيانيّاً مجموعة حل نظام المتباينات الآتي:

ص ≤ ٦

ص ≤ −٣ + س

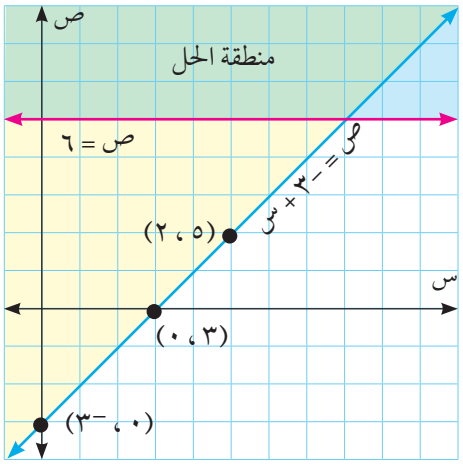
١ لرسم منطقة حلّ المتباينة: ص ≤ ٦

أَرسمُ الخط المستقيم ص = ٦ في المستوى الديكارتي، أُحددُ منطقة حلّ المتباينة ص ≤ ٦

٢ لرسم منطقة حل المتباينة : ص ≤ −٣ + س

أَرسمُ المستقيم ص = −٣ + س

س	٠		٥
ص		٠	



٣ أُحددُ منطقة حلّ المتباينة ص ≤ −٣ + س

من الشكل المجاور أُحددُ المنطقة التي تبيّن مجموعة حلّ نظام المتباينتين.

من الشكل المجاور أَكتبُ ثلاث نقاط تقع في منطقة حلّ النظام.

نشاط ٥: أمثل بيانياً مجموعة حل نظام المتباينات الآتية.

ص ≤ س + ٥

ص ≥ س − ٤

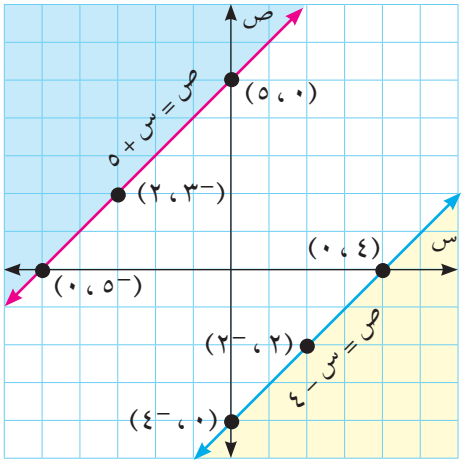
١ لرسم منطقة حلّ المتباينة: ص ≤ س + ٥

- أَرسمُ الخط المستقيم ص = س + ٥
- أُحددُ منطقة حلّ المتباينة ص ≤ س + ٥

٢ لرسم منطقة حلّ المتباينة: ص ≥ س − ٤

- أَرسمُ المستقيم ص = س − ٤
- أُحددُ منطقة حل المتباينة ص ≥ س − ٤

٣ من الشكل المجاور أُحددُ منطقة حل المتباينتين معاً. ماذا تُلاحظ؟

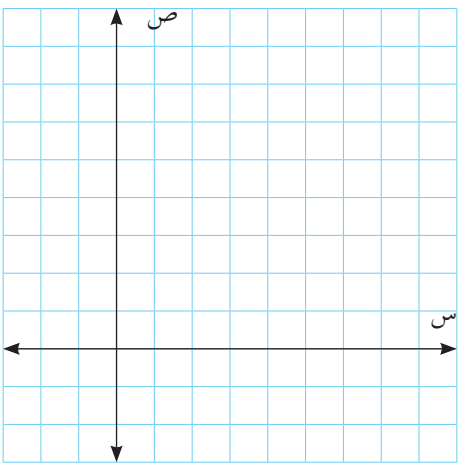


أتعلم: في حال عدم وجود منطقة مشتركة بين منطقتي حل المتباينتين، تكون مجموعة الحل $\varnothing$.

نشاط ٦: مدينة أَريحا منطقة سياحيّة مُهمة في فلسطين: لموقعها الجغرافي، ومناخها المعتدل في فصل الشتاء؛ لذلك يُفضل سكان فلسطين قضاء عُطلتهم الشتوية فيها. قرر محمد وشادي أَن يقضيا عطلتهما في مدينة أَريحا، فإذا كان عدد أَيام عطلة محمد مضافاً إِليه ضعفا عدد أَيام عطلة شادي على الأَكثر ١٤ يوماً.
أُكوِّنُ نظام المتباينات الذي يمثّلُ عدد أَيام عطلة محمد وشادي، ثم أُمثّله بيانياً.

أَفرض أَن عدد أَيام عطلة محمد يساوي س يوم
وعدد أَيام عطلة شادي يساوي ص يوم.

- متباينة عدد أَيام عطلة محمد س $\leq$ ٠
- متباينة عدد أَيام عطلة شادي _____.
- المتباينة التي تمثِّل عدد أَيام عطلة محمد مضافاً إِليه ضعفا عدد أَيام عطلة شادي _____.
- أُمثِّلُ مجموعة حلّ نظام المتباينات بيانياً:
- إِذا قضى محمد يومين من عطلته في أَريحا، فما عدد الأَيام التي قضاها شادي على الأَكثر؟



تمارين ومسائل ١ - ٥:

١ أَيّ النقاط الآتية تنتمي إِلى مجموعة حلّ المتباينة: ٢س + ص $\leq$ ٣
(٠ ، ١) ، (−١ ، ٣) ، (٢ ، ٣)

٢ أُمثِّل مجموعة حلّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية بيانياً:
أ ٣س + ص $\leq$ −٢ ب ص < −٢س + ٥

٣ أُمثِّل مجموعة حلّ أَنظمة المتباينات الآتية بيانياً:
أ س + ص $\leq$ ٤ ب ٢ص − ٥س $\leq$ ٦
ص $\leq$ س ٤س + ص > −٤

٤ أُمثِّل بيانياً مجموعة الحلّ لنظام المتباينات الآتي:
س $\leq$ ٣
ص $\geq$ ٠
س + ص $\leq$ ٢

١ - ٦ تطبيقات عمليّة (البرمجة الخطيّة) Linear Programming



نشاط ١: يُعتبر فن التطريز جزءاً من التراث الشعبي الفلسطيني العريق الذي ورثه الشعب عن الآباء والأَجداد منذ أَكثر من أَربعة آلاف عام، ذلك الفن الذي يتجلّى من خلال عراقته وصدق تعبيره وشرف الانتماء إِليه.

في محل بيع أَثواب التراث الفلسطينيّ هناك نوعان من الأَثواب المطرزة، ثمن النّوع الأَول ١١ ديناراً، وثمن النّوع الثاني ٢٢ ديناراً، فإِذا كان مع منال ٤٤ ديناراً. أَحسبُ أَكبر عدد من الأَثواب التي يمكن لمنال أَنَ تشتريها.

أَفرض أَن عدد الأَثواب التي يجب شراؤها من النّوع الأَول س، ومن النّوع الثّاني ص.

أُكملُ الجدول الآتي:

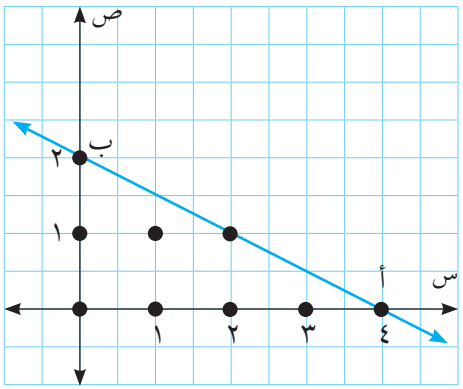
	سعر الثّوب	عدد الأَثواب	الثمن الكلي للأَثواب
النّوع الأَول	١١ ديناراً	س	١١س
النّوع الثاني			

١ أُحددُ شروط (قيود) عملية الشراء:

الشرط الأَول: مجموع أَثمان الأَثواب التي تمّ شراؤها أَقل من أَو يساوي ٤٤ ديناراً أَي أَن:

١١س + ٢٢ ص ≤ ٤٤

بالتبسيط تصبح المتباينة: _____ .



الشرط الثاني: أَن عدد الأَثواب هو عدد صحيح غير سالب.

يمثِّلُ الشكل المجاور مجموعة جميع النقاط (س ، ص) التي تحقق الشروط المفروضة، وهي النقاط البارزة وعددها ٩ نقاط، ممثلة في المنطقة المثلثية (أ م ب) كما في الشكل المجاور.

فمثلاً: النقطة (١ ، ١) تمثّل شراء ثوب واحد من النّوع الأول وثوب واحد من النّوع الثاني ومجموع ثمنيهما يساوي:

١١ × ١ + ٢٢ × ١ = ٣٣ ديناراً.

النقطة (٠ ، ٢) تُمثّل: _____ ، ومجموع ثمنيهما يساوي: _____ .

٢ تحديد اقتران الهدف:

إيجاد قيمة س ، ص ضمن منطقة الحلّ والتي تجعل المقدار اقتران الهدف: س + ص أكبر ما يمكن. لإيجاد الإمكانات جميعها وقيمة (س + ص) المناظرة لكل منها،أُكملُ الجدول الآتي:

النقطة (س ، ص)	(٠،٠)	(٠، ١)	(٠، ٢)	(٠، ٣)	(٠، ٤)	(١، ٠)	(١،١)	(١، ٢)	(٢، ٠)
المقدار (س + ص)	٠	١					٢	٣	

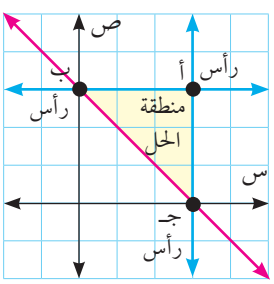
أكبر قيمة للمقدار(س + ص) : _____ المناظرة لقيمة س = _____ ، ص = _____ .

وهذا يعني أن أكبر عدد من الأثواب يمكن شراؤه = _____ وجميعها من النوع _____ .

من الشكل السابق أُلاحظ أن النقطة (٤ ، ٠) تمثّلُ إحدى النقاط المتطرفة في منطقة الحلّ (أي عند رؤوس المنطقة المثلثية التي تمثّل منطقة الحلّ).

أتعلم: طريقة الحلّ باستخدام البرمجة الخطيّة:

- **أُحددُ القيود (الشروط) وأضعها في صورة متباينات.**
- **أكتبُ اقتران الهدف.**
- **أُحددُ منطقة الحلّ ورؤوسها (المناطق المتطرفة).**
- **أجدُ اقتران الهدف عند كل رأْس لتحديد الهدف المطلوب.**



نشاط ٢: في مصنع البسكويت خطا إنتاج، يُنتج الخط الأَول ٢٠ عُلبة من النّوع أ و ١٠ عُلب من النّوع ب في اليوم الواحد بتكلفة إِنتاج ٢٤٠ ديناراً، ويُنتج الخط الثاني ١٠ عُلب من النّوع أ و ٥٠ عُلبة من النّوع ب في اليوم الواحد بتكلفة إِنتاج ٢٠٠ دينار. فإِذا استلم المصنع طلباً لتوريد ١٥٠ عُلبة من النّوع أ و٢١٠ عُلبة من النّوع ب، فكم يوماً يلزم لتشغيل عمل الخطين لتلبية الطلب بأَقل تكلفة ممكنة؟

أفرض أَن عدد الأَيام اللازمة لتشغيل الخطين الأَول والثاني هي س ، ص على الترتيب.

أُكملُ الجدول الآتي:

	عدد العُلب من النّوع (أ)	عدد العُلب من النّوع (ب)
إِنتاج الخط الأَول	٢٠س	
إِنتاج الخط الثاني	١٠ص	
المجموع	٢٠س + ١٠ص	
الكمية المطلوبة	١٥٠	

ما الشروط على المتغيرين س ، ص؟

الشّرط الأَول: ٢٠س + ١٠ص ≤ ١٥٠. أُفسِّرُ ذلك.

الشّرط الثّاني: _____ .

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، لماذا؟

بهذا نحصل على نظام المتباينات الآتي:

٢٠س + ١٠ص ≤ ١٥٠

١٠س + ٥٠ص ≤ ٢١٠

س ≤ ٠

ص ≤ ٠

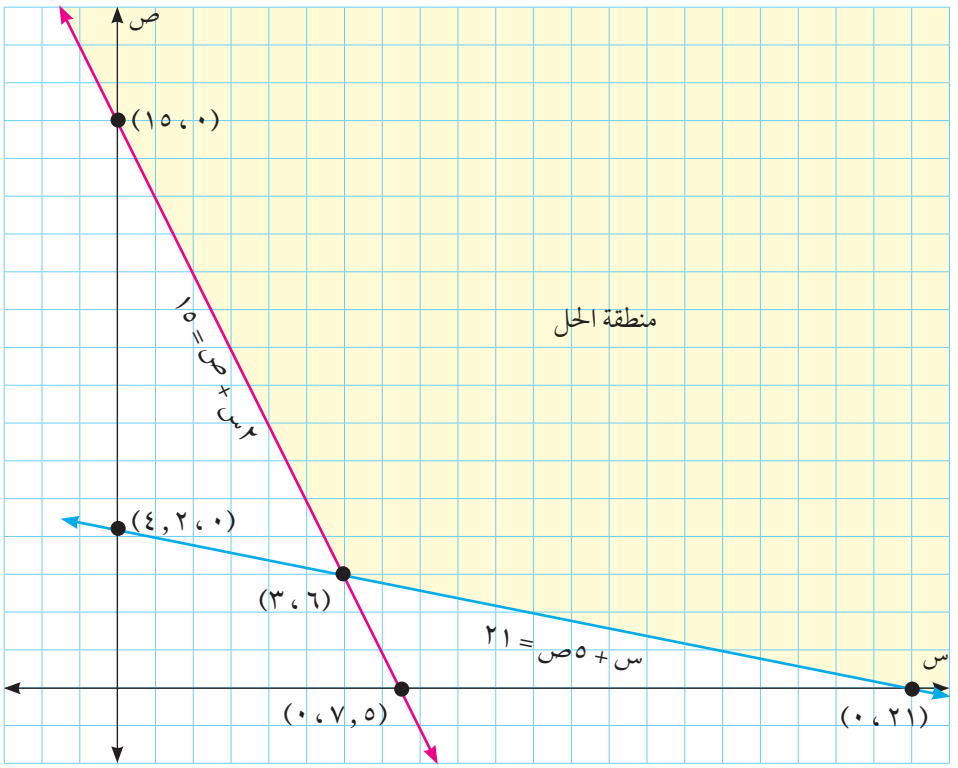
كلفة الإِنتاج عند تشغيل الخطّ الأَول س يوم يساوي ٢٤٠س ديناراً. كما أَن كلفة الإِنتاج عند تشغيل الخطّ الثّاني ص يوم يساوي _____ ديناراً.

وتؤول المسأَلة لجعل المقدار (اقتران الهدف) ٢٤٠س + ٢١٠ص أَقل ما يمكن.

المتباينة ٢٠ س + ١٠ ص ≤ ١٥٠ ، يمكن كتابتها ٢ س + ص ≤ ١٥

المتباينة ١٠س + ٥٠ص ≤ ٢١٠ ، يمكن كتابتها _____ .

وتمثّل المنطقة المظللة في الشكل الآتي مجموعة الحلّ لنظام المتباينات.



من الرسم أُلاحظُ الرؤوس التي تمثّل المناطق المتطرفة، وهي ثلاث نقاط كما في الشكل السابق أُحددُها.

الجدول الآتي يُلخص قيم اقتران الهدف عند هذه النقاط.

النقطة	س	ص	قيمة اقتران الهدف ٢٤٠س + ٢١٠ص
أ	٢١	٠	٢٤٠ × ٢١ + ٠ = ٥٠٤٠ دينار
ب	٦	٣	
جـ	٠	١٥	

أُكملُ الجدول، وأُحددُ متى يكون اقتران الهدف أَقل ما يمكن؟

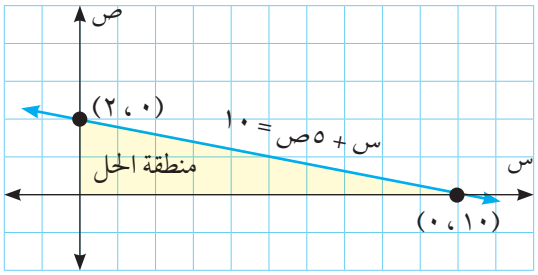
ما عدد الأَيام التي يعمل بها كل من خطي الإِنتاج الأَول والثّاني وتكون عندها أَقل تكلفة ممكنة؟

تمارين ومسائل ١ - ٦:

١ في الشكل المجاور منطقة مظللة تمثّل مجموعة حلّ نظام من متباينات.

أكتب هذا النظام.

أَجِد القيمة العظمى والصغرى للمقدار (اقتران الهدف) ٤س + ٢ص



٢ أُمثِّل مجموعة حلّ النظام التالي بيانياً.

س + ٢ص ≥ ١٠

س – ص ≥ ٣

س ≤ ٠

ص ≤ ٠

ثُم أَجِدْ النقط المتطرفة (الرؤوس)، ثم أُحددُ متى يكون (اقتران الهدف) ٥س – ص ضمن هذا النظام أَكبر ما يمكن.

٣ **أفكر : يُنتج أَحد مصانع النسيج نوعين من القماش وتُستعمل آلتان في صنع كل من هذين النّوعين: الأُولى تنسج الخيوط والثانية تلوّن النسيج، ولإِنتاج الثوب الواحد من النّوع الأَول تعمل الآلة الأُولى ساعتين، وتعمل الآلة الثّانية ساعة واحدة، ولإِنتاج الثّوب الواحد من النّوع الثّاني تعمل الآلة الأُولى ساعة واحدة وتعمل الآلة الثانية ساعتين، فما إِمكانيات هذا المصنع الإِنتاجية، علماً بأَن أي من الآلتين لا تعمل أَكثر من ٨ ساعات يومياً؟**

تمارين عامة:

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما مجموعة حل المعادلة ٢س – ٣ = ٧ ؟

أ) {–٥}　　ب) {–٢}　　جـ) {٢}　　د) {٥}

٢ ما النقطة التي تحقق المعادلة ص = ٢س – ٤؟

أ) (٤ ، –٢)　　ب) (٠ ، –٤)　　جـ) (٢ ، –٤)　　د) (–٢ ، ٤)

٣ إذا كان عُمر محمد خمسة أمثال عُمر حسن مضافاً إليه ٢، وكان عُمر حسن يساوى ٧ سنوات، فكم عُمر محمد؟

أ) ٤٥　　ب) ٣٧　　جـ) ١٤　　د) ١٠

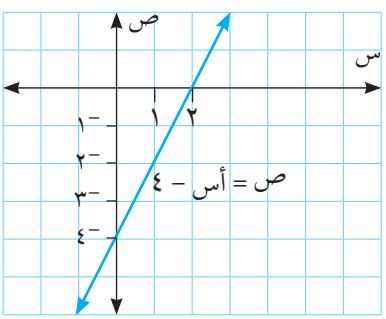
٤ يمثّلُ الشكل المجاور معادلة الخط المستقيم:

ص = أس – ٤ .

فما قيمة أ التي تجعل ص = أس – ٤ = صفر؟

أ) أ = –٤　　ب) أ = ٢

ج) أ = ٠　　د) أ = –٢



٥ إذا كانت س = –٥ وكان ص = ٣س – ٤ فما قيمة ص؟

أ) –١٩　　ب) –٢٧　　جـ) –١٥　　د) –١١

٦ إذا كانت س – ٢ص ≤ صفر، فما قيمة النقطة (س ، ص) التي تنتمي إلى مجموعة حلّ المتباينة؟

أ) (–١ ، ٤)　　ب) (٤ ، ١)　　جـ) (٢ ، ٢)　　د) (–٢ ، ٣)

٧ ما النقطة التي تنتمي لمجموعة حلّ النظام س – ص < ١ ، ص + س > ١؟

أ) (٢ ، ٠)　　ب) (–٥ ، ٠)　　جـ) (٠ ، –٢)　　د) (٠ ، ٥)

٨ إذا كانت النقطة (٧ ، ٠) هي إحدى النقاط المتطرفة في مجموعة حلّ النظام

س + ٢ ≤ ٧

٢س + ص ≤ ١١

فما قيمة اقتران الهدف ٤س + ٥ص عند هذه النقطة؟

أ) ٣٣　　ب) ٢٨　　جـ) ٩　　د) ٧

٢ أَحِلّ النظام الآتي باستخدام طريقة التعويض:

س + ٣ ص = ١٥

٤ س + ص = ١٦

٣ أحِلّ النظام الآتي باستخدام طريقة الحذف:

س + ص = ٥

٢ س + ص = ٦

٤ أُمثِّل مجموعة حل النظام التالي بيانياً:

٢ س + ص > ٤

س + ص ≥ ٢

٥ أَجدْ القيمة العظمى للمقدار ٤ س + ٢ص بشرط:

٢ س + ص ≥ ١٥

س + ٣ ص ≥ ٢٠

س ≥ ٠

ص ≥ ٠

٦ يُراد وضع نوعين من الكتب أ، ب على رفّ مكتبة طوله ٩٦سم، وحمولته القصوى ٢٠ كغم، فإذا كان كتلة الكتاب من كلا النّوعين هو ١ كغم، وسُمك الكتاب من النّوع أ هو ٦سم، ومن النّوع ب ٤سم، فما عدد الكتب من كل نوع والتي يجب وضعها على الرفّ بحيث يكون عددها أكبر ما يمكن.

أقيّم ذاتي أكمل الجدول الآتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	متدني
أحل معادلتين خطيتين بعدة طرق			
أحل نظام من معادلات خطية وتربيعية			
أوظف حل المتباينات في حل مشكلات حياتية			

فكرة ريادية

العنوان / حلّ مشكلة انقطاع التيار الكهربائي في فلسطين خلال فصل الشتاء بأَقل التكاليف الممكنة.

يُعاني المواطنون في فلسطين من انقطاع التيار الكهربائي لساعات طويلة في فصل الشتاء، مما يؤثّر سلباً على مناحي الحياة جميعها.

أَعدُّ مشروعاً يحلّ مشكلة انقطاع التيار الكهربائي في فلسطين بأَقل التكاليف الممكنة، مع توضيح البدائل الممكنة جميعها والحلّ الأَمثل.



روابط إلكترونية



- https://www.desmos.com/calculator
- http://www.naja7math.com/graph/

الوحدة

٢

الإحصاء والاحتمالات



كم تتوقّع أن يكون عدد اللاجئين الذين يحتفظون بمفاتيح العودة في المخيمات الفلسطينية في لبنان؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف أَساليب البحث العلمي في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التّعرف إِلى مفهوم البحث العلمي.
٢. التّعرف إِلى أَنواع العينات.
٣. التّعرف إِلى مفهوم المتغير العشوائي المنفصل.
٤. إِيجاد توقع المتغير العشوائي المنفصل.
٥. التّعرف إِلى خواص التجارب العشوائية ذات الحدين.
٦. حلّ مسائل حياتيّة على توزيع ذات الحدين.
٧. إِيجاد التّوقع في التّجارب العشوائيّة ذات الحدين.

«إن العلم غايته الحقيقة ووسيلته البحث وأَداته الاستنتاج والاستنباط ... وما يجب وضعه في الاعتبار هو ثِقل التجارب لا عددها».

١ - ٢ البحث العلمي Scientific Research

نشاط ١: إن تسرب الطلبة من المدارس يُعدّ من الظواهر التي تشكّل تحدياً للمجتمع الفلسطينيّ، والتي تؤثّر سلباً عليه، حيث تزيد من حجم الأُميّة والبطالة، وتضعف البنية الاقتصادية والاجتماعية له.
من أسباب التّسرب: انخفاض مستوى التّحصيل لدى الطلبة والزواج المبكر و _____.

أُناقش: ما الإجراءات الوقائية للحد من ظاهرة التسرب؟.

تعريف: البحث العلمي: إجراء علميّ منظم وموضوعيّ يقوم به باحث أَو مجموعة باحثين لإيجاد حلّ لمشكلة ما.

خطوات البحث العلمي:

١. تحديد مشكلة البحث وأَهدافه من خلال القراءات والدراسات أو الاطّلاع الميدانيّ على المشكلة والإحساس بها.
٢. صياغة فرضيات البحث: استنتاجات أَو تخمينات مؤقتة يتم رفضها أَو قبولها في نهاية البحث.
٣. جمع المعلومات من مصادرها المختلفة باستخدام أَدوات منها: المقابلة، الاستبانة، الملاحظة.
٤. تحليل المعلومات والبيانات ومعالجتها للوصول إِلى النتائج والتوصيات.
٥. كتابة تقرير البحث بصورته النهائية.

نشاط ٢: تُعاني الكثير من المدارس من مشكلة تأَخّر الطلبة عن الطابور الصباحيّ، مما يؤثر سلباً على مستوى تحصيل الطلبة وانتظام الدوام في المدرسة، أَراد المرشد التربوي في إِحدى المدارس البحث في أَسباب المشكلة وسبل حلّها.
أُحدد مشكلة البحث : _____.

أُكملُ الجدول الآتي:

صياغة فرضيات البحث	• يتأَخّر الطلبة عن الطابور الصباحي بسبب الاستيقاظ المتأَخر. • يتأَخر الطلبة عن الطابور الصباحيّ بسبب صعوبة المواصلات. أَقترحُ فرضيات أُخرى. _____ ، _____ .
مصادر جمع المعلومات وأَدواتها	المصادر: الطلبة، مصادر الكترونية، الأُسرة. أَقترح مصادر أُخرى. _____ ، _____ . الأَدوات: المقابلة، الاستبانة. أَقترحُ أَدوات أُخرى.
كتابة النتائج والتوصيات	النتائج: يتأَخر الطلبة بسبب الاستيقاظ المتأَخر، أَقترحُ نتائج أُخرى. _____ ، _____ . التوصيات: • توعية الطلبة بأَهمية الاستيقاظ مبكراً. • الخروج المبكر من المنزل للتغلب على مشكلة المواصلات. • أَقترحُ توصيات أُخرى. • _____ ، _____ .

تمارين ومسائل ٢-١:

١ أذكر ٣ مشكلات من بيئتي تحتاج إِلى بحث علميّ.

٢ نفذ باحث دراسة هدفت إِلى معرفة العلاقة بين عدد الساعات التي يقضيها الطالب في مشاهدة التلفاز وتحصيله الدراسي في مدرسة عدد طلبتها ٣٥٠ طالباً، فقابل ٧٠ طالباً وسأَلهم عن عدد الساعات التي يقضونها في مشاهدة التلفاز، وقارنها بمستوى تحصيلهم، فتوصل هذا الباحث إِلى وجود علاقة بين عدد ساعات مشاهدة التلفاز ومستوى التحصيل لديهم.

أ أُحدد مشكلة الدراسة.

ب أكتب ثلاث فرضيات للدراسة.

جـ أذكر أَداة/ أَدوات جمع بيانات هذه الدراسة.

٣ **أفكر**: في السؤال السابق، لماذا اختارَ الباحث ٧٠ طالباً فقط من طلبة المدرسة؟

٢ - ٢ العينات الإحصائية Statistical Samples



نشاط ١: القمح هو المادة الغذائية الرئيسة في فلسطين والعالم، تدنّى مستوى إنتاجه في فلسطين في الأعوام الأخيرة لأسباب عديدة، منها: انخفاض معدل كميّة الأمطار التي هطلت.

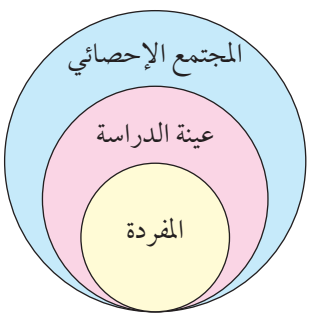
اقترحَ أحد المعنيين أن تتم زراعة السهول في فلسطين كافة، لتجربة نوعية جديدة من البذور تتلاءم مع كميّة الأمطار التي هطلت لتحسين إنتاجه، واقترحَ آخر زراعة ٥ دونمات موزّعة على مناطق عديدة.

أُناقش: أيّ الاقتراحين أفضل؟ لماذا؟

عند إجراء بحث علمي لدراسة ظاهرة أو مشكلة معينة نستخدم:

١ **أُسلوب الحصر (المسح) الشامل أو أُسلوب التعداد:** وفيه تجمع البيانات من الأفراد جميعهم (المجتمع الإحصائي) الذين تتعلق بهم الظاهرة قيد الدراسة كمعرفة التعداد العام للسُّكان في فلسطين، أذكرُ أمثلة أُخرى.

٢ **أُسلوب العينة:** وفيه تجمع البيانات من عدد محدود من أفراد المجتمع الإحصائي (العينة)، حيث تكون ممثلة له، ويلجأُ الباحث لاستخدام أُسلوب العينة لاعتبارات عديدة، منها: فساد عناصر المجتمع (مفردات المجتمع) نتيجة أخذ المشاهدات من تلك العناصر، تعذُّر الوصول إلى عناصر المجتمع الإحصائي جميعهم، ارتفاع تكلفة دراسة أفراد المجتمع الإحصائي جميعهم، الحصول على نتائج سريعة.



أُناقش: أسباب أُخرى لاختيار أُسلوب العينة في دراسة ظواهر معينة.

نشاط ٢: استخدم الباحثون أُسلوبي: الحصر الشامل والعينة في دراسة الظواهر المختلفة.
أُكمل الجدول الآتي بذكر الأُسلوب المناسب لكل دراسة وسبب اختياره:

موضوع البحث	الأُسلوب المناسب	السبب
دراسة صلاحية المواد الغذائية المستوردة من خارج فلسطين.	العينة	فساد عناصر المجتمع نتيجة أَخذ المشاهدات من تلك العناصر.
عدد المواليد في أَحد المستشفيات.	الحصر الشامل	للوصول إلى نتائج دقيقة، وسهولة الوصول إِلى عناصر المجتمع.
معرفة نوعية الزيت قبل شراء تنكة كاملة منه.		
استطلاع الرأي العام حول ملف الإِنجاز الذي أَقرته وزارة التربية والتعليم العالي الفلسطينية.		
متوسط مساحة المنازل في قرى الضفة الغربية.		
معرفة عدد مزارع الدواجن في فلسطين.		
رصد أَساليب التعذيب المستخدمة في سجون الاحتلال.		

أَنواع العينات:

يمكن تقسيم العينات إِلى نوعين رئيسين:

- العينات الاحتمالية: وهي العينات التي تتم بالاختيار العشوائيّ (تكافؤ الفرص).
- العينات غير الاحتمالية: وهي العينات التي لا تتم بالاختيار العشوائيّ.

العينات الاحتمالية وتصنف كما يأتي:

١ **العينة العشوائية البسيطة**: وهي العينة التي يُعطي فيها الباحث فرصاً متساوية لكل فردٍ من أَفراد المجتمع الإحصائي المتجانس (له نفس الخصائص المشتركة التي يتطلب دراستها والتعرف عليها)، وتتم بإِحدى الطريقتين الآتيتين:

أ طريقة القرعة: وتستخدم عادة في حالة المجتمعات المتجانسة الصغيرة.

ب جداول الأَرقام العشوائية: وهي سلسلة من الأَرقام الأُفقية والعمودية المدرجة في جداول محددة.

وسنقتصر في هذه الوحدة على دراسة العينة العشوائية البسيطة باستخدام طريقة القرعة.

أتعلم: يرى بعض الباحثين أَن الحجم المناسب للعيّنة التي تكون ممثّلة للمجتمع يجب أَلا يقل عن ٥٪ إِلى ١٠٪ من حجم المجتمع بحيث لا يقلّ حجم العينة عن ٣٠ فرداً.

نشاط تعاوني ٣: لاختيار خمسة من طلبة الصف الحادي عشر البالغ عددهم ٣٠ طالباً في مدرسة ما للمشاركة في فعاليات إِحياء ذكرى الشهيد ياسر عرفات في رام الله باستخدام طريقة القرعة، نتبع الخطوات الآتية:

١ أُعطي لكل طالب من طلبة الصف الثلاثين رقماً متسلسلاً من ١-٣٠.

٢ أَكتبُ الأَرقام من ١-٣٠ على قصاصات صغيرة متماثلة من الورق.

٣ أَطوي القصاصات وأَضعُها في سلة أَو صندوق وأَخلطها جيداً.

٤ أَسحبُ قصاصة أُولى من الصندوق وأُسجّل الرقم الذي تحمله.

٥ أُعيدُ القصاصة إِلى الصندوق وأَخلط القصاصات جميعها من جديد، وأَسحب قصاصة ثانية، وأُسجّل الرقم الذي تحمله.

وفي حالة سحب قصاصة تم سحبها مسبقاً تُعاد إِلى السلة أَو الصندوق ويتم السحب من جديد.

٦ أُكررُ هذه العملية -عملية السحب مع الإِرجاع- حتى يكون لدي الأَرقام الخمسة المطلوبة فيكون أَصحاب هذه الأَرقام هم مفردات العينة العشوائية البسيطة المطلوبة.

٢ **العينة العشوائية الطبقيّة:** هي العينة التي تمثّل الطبقات الفرعية التي يتكون منها المجتمع الإِحصائي غير المتجانس.

$$\text{عدد أفراد العينة في كل طبقة} = \frac{\text{عدد أفراد الطبقة}}{\text{عدد أفراد المجتمع}} \times \text{حجم العينة}$$

نشاط ٤: إِذا كان عدد طلبة كلية العلوم في إِحدى الجامعات الفلسطينية ٢٠٠ طالب، ٨٠ منهم ذكور والباقي إِناث، أَراد باحث اختيار عينة طبقية حجمها ٢٠٪ من طلبة الكلية.

حجم العينة = ٤٠ طالباً وطالبة. لماذا؟

عدد الطالبات = _____.

أَجدُ عدد أَفراد العينة في كل طبقة فرعية.

الطبقات الفرعية	حجم الطبقة
عدد أَفراد العينة من الذكور	$\frac{٨٠}{٢٠٠} \times ٤٠ = ١٦$ طالباً.
عدد أَفراد العينة من الإِناث	

باستخدام أُسلوب العينة العشوائية البسيطة أَختار العينة موضّحاً الخطوات.

نشاط ٥: أَراد باحث دراسة العلاقة بين مستوى تحصيل الطلبة والدرجة العلمية لدى الآباء، فاختار عينة حجمها ١٠٪ من طلبة مدرسة فيها ٦٥٠ طالباً موزّعين على الصّفوف كما في الجدول الآتي:

الصّف	السّابع	الثّامن	التاسع	العاشر
عدد الطلاب	٢٠٠	١٥٠	١٨٠	١٢٠

حجم العينة = ٦٥ طالباً. لماذا؟

أُوضِّحُ طريقة اختيار هذه العينة.

٣ **العينة العشوائية المنتظمة:** يتم اختيار مفرداتها بطريقة منتظمة بناء على ترتيب معين بعد أَن يتم اختيار نقطة البداية (المفردة الأُولى) بطريقة عشوائية.

نشاط تعاوني ٦: لاختيار ٦ طلبة من صف فيه ٣٠ طالباً بطريقة العينة العشوائية المنتظمة. أَتبع الخطوات الآتية:

١ أَعطي لكل طالب من طلبة الصف الثلاثين رقما متسلسلاً من ١ إِلى ٣٠.

٢ أُحدد المسافة الثابتة بين كل طالب من طلبة العينة والذي يليه وذلك (بقسمة عدد طلبة الصف على عدد طلبة العينة).

المسافة الثابتة = ٣٠ ÷ ٦ = ٥

٣ أُحددُ رقم البداية (رقم الطالب الأَول) باختيار رقم عشوائيّ من ١ إلى ٥.

٤ أَختارُ رقم الطالب الثاني بإِضافة المسافة الثابتة إِلى رقم البداية.

٥ أُكررُ العملية للحصول على العينة المطلوبة.

نشاط ٧: يُراد سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها ٩٠ فرداً من مجتمع حجمه ٤٥٠ فرداً.

المسافة الثابتة = ٤٥٠ ÷ ٩٠ = ٥

١ إِذا كان رقم العنصر الأَول من العينة هو ٢.

٢ رقم العنصر الثاني= ٢ + ٥ =٧ . لماذا؟

٣ رقم العنصر الثالث= ١٢ . لماذا؟

٤ رقم العنصر الرابع= _____.

٤ **العينة العنقودية (متعددة المراحل)**: ترتكز على تقسيم مجتمع الدراسة إِلى شرائح عديدة، وكل شريحة يمكن تقسيمها إِلى شرائح عديدة أُخرى، وهي تختلف عن العينة العشوائية الطبقية في مبدأ العناقيد الذي يحدد أَن تكون العناقيد متباينة في داخلها متجانسة فيما بينها.

مثال: أَراد باحث اجتماعي اختيار عينة عنقودية (متعددة المراحل) لدراسة المستوى المعيشي في مدينة غزة أُوضِّحُ الخطوات اللازمة لاختيار عينة البحث العنقودية.

الحل :

١ يُقسّم الباحث المدينة إِلى مناطق (أَحياء) ولتكن خمس مناطق على سبيل المثال.

٢ يختار الباحث عشوائياً منطقة أو أكثر من المناطق الخمس وهذه المرحلة الأُولى وليكن منطقة واحدة.

٣ يختار الباحث عشوائياً عدد من شوارع المنطقة (الحي) الذي اختاره في المرحلة الأُولى وليكن شارعين.

٤ يختار الباحث عشوائياً عدد من المنازل وليكن (١٥) منزلاً من كل شارع من الشارعين اللذين اختارهما في المرحلة الثالثة فتكون المنازل الثلاثين التي اختارها الباحث ممثلة للعينة التي يجمع منها بياناته.

نشاط ٨: أَرادت إِحدى وسائل الإِعلام الفلسطينية استطلاع الرأي العام حول درجة الرضا عن المناهج الفلسطينية الجديدة، قرر الموظفون في الإِذاعة استطلاع آراء ١٠٠٠ شخص فقط من محافظات الضفة الغربية وقطاع غزة.

ما الطريقة التي تقترحها لاختيار العينة المستهدفة ؟ أُناقشُ خطوات اختيارها.

العينات غير الاحتمالية: وهي العينات التي يتم اختيارها بطريقة غير عشوائية، منها:

١ **العينة القصدية**: تعمّد الباحث اختيار فئة معينة من مجتمع الدراسة، مثل: دراسة آراء المشرفين حول برنامج تربوي معين.

٢ **العينة العرضية أَو عينة الصدفة**: اختيار فئة معينة بشكل عرضي (صدفة) في مكان وزمان محددين، مثل أَخْذ بعض البيانات من صحيفة معينة.

٣ **عينة كرة الثّلج**: يختار الباحث شخصاً، وبدوره يقترح مجموعة أَشخاص آخرين، وكلّ شخص منهم يقترح مجموعة أُخرى، وتكبر العينة حتى يصل الباحث إِلى عينته.

نشاط ٩:

- من الأَمثلة على عينة كرة الثّلج: اختيار بعض طلبة جامعة بيرزيت من خارج مدينة رام الله والذين يسكنون في مساكن خاصة وهم بدورهم يختارون طلبة آخرين وهكذا لدراسة ظروفهم الاجتماعية والاقتصادية.
أُعطي أَمثلة أُخرى: _____.

- من الأَمثلة على العينة القصديّة: اختيار مجموعة من الطلبة الأَوائل في الثانوية العامة لعام ٢٠١٦ – ٢٠١٧م لدراسة الأَسباب التي أَسهمت في تفوقهم.
أُعطي أَمثلة أُخرى: _____.

- من الأَمثلة على العينة العرضية: مقابلة مجموعة من الأَشخاص المارّة في شارع معين لاستطلاع وجهات نظرهم حول ارتفاع أَسعار المواد الغذائية.
أُعطي أَمثلة أُخرى: _____.

تمارين ومسائل ٢ - ٢:

١ أُحدد نوع العينة في كل حالة من الحالات الآتية:

أ استطلع باحث أَراء أَول ٢٠٠ مصلٍ قابلهم بعد صلاة ظهر الجمعة في المسجد الأَقصى.

ب أَرادت شرطة المرور معرفة معدل سرعة السيارات المسافرة من مدينة جنين إِلى مدينة رام الله، سجلت الشرطة سرعة السيارات المارة عند نقطة معينة فكان ترتيبها ٧، ١٧، ٢٧، ... وهكذا.

جـ اختيار عينة حجمها ٢٠٪ من طلبة السنة الرابعة في كليات الهندسة والاقتصاد والعلوم في الجامعة الإِسلامية بمدينة غزة.

د اختيار المعلمين المتقاعدين في محافظة جنين لمعرفة اتجاهاتهم القرائية والكتب التي يحتاجونها.

٢ يُراد سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها ٢٠٠ شخصٍ من مجتمع حجمه ٢٠٠٠ شخص، إِذا كان رقم العنصر الأَول من العينة هو ٩، فما رقم العنصر الثاني؟ وما رقم العنصر الثالث؟

٣ أراد باحث التعرف على آراء لاعبي الأندية الرياضية لكرة القدم حول دور المدرب في تطور أداء اللاعبين في محافظات الضفة الغربية. أُوضِّحُ خطوات تكوين عينة عنقودية لهذا الغرض.

٤ مؤسسة خاصة فيها ٣٠٠ موظف كما في الجدول الآتي:

عدد سنوات الخدمة	أَقل من أو يساوي ١٠ سنوات	أَكثر من ١٠ سنوات
عدد الموظفين	١٨٠	١٢٠

قررت إِدارة الشركة اختيار عينة حجمها ٦٠ موظفاً يمثّلون عدد السنوات المختلفة لدراسة درجة رضاهم عن المكافأَة المالية التي يتقاضاها الموظف في نهاية الخدمة. أُوضِّحُ طريقة اختيار هذه العينة.

٥ أوضح الفرق بين العينة العرضية والعينة القصدية.

٦ **أفكر** : يُراد سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها ٤٠٠ شخصاً من مجتمع حجمه ٤٠٠٠ شخص، إِذا كان رقم العنصر الأَول من العينة هو ٦، فما رقم العنصر الأَخير؟

٢ - ٣ المتغيّر العشوائيّ Random Variable

نشاط ١: رياضة كرة القدم من أكثر الألعاب شعبية في العالم، ولكل دولة منتخب يمثّلها في مباريات كأس العالم، ومنتخبنا الفلسطيني هو أحد هذه المنتخبات.



استعداداً لتصفيات كأس العالم قرر مدرب الفريق لعْب مباراة ودية مع منتخب الجزائر الشقيق، هل يمكن معرفة نتيجة المباراة قبل إِجرائها؟ لماذا؟

نشاط ٢: أُكملُ الجدول الآتي:

التجربة	مجموعة جميع النواتج الممكنة
عائلة لديها طفل واحد.	
اتحاد ذرتي هيدروجين مع ذرة أُكسجين.	
رَمْي حجر نرد منتظم مرة واحدة.	
جَمْع العدد ١٦ مع العدد ١٤ وتسجيل المجموع.	
سَحْب كرة من كيس يحتوي على ٥ كرات حمراء، و ٦ كرات بيضاء.	

أُحدد التّجارب التي نستطيع تحديد نتيجتها حتى قبل إِجرائها.

أُسمّي هذا النوع من التجارب بالتجارب العلمية.

أُحددُ التجارب التي لا يمكن تحديد الناتج الذي سيتحقق إِلا بعد إِجرائها.

أُسمّي هذا النّوع من التّجارب: _____.

أُسمّي مجموعة جميع النّواتج الممكنة لها: _____.

أتعلم: التجربة العشوائيّة: هي التجربة التي لا نستطيع تحديد نتيجتها قبل إجرائها، ولكن نستطيع تحديد مجموعة جميع النتائج الممكنة للتجربة، وتُسمّى هذه المجموعة الفضاء العينيّ (Ω).

نشاط ٣:



الجنيه الفلسطينيّ عملة صدرت عن مجلس فلسطين للنقد عام١٩٢٧م. حملت القطع النقدية والأَوراق المالية كتابات بلغات ثلاث.

أُلقيت إِحدى هذه القطع المنتظمة مرتين متتاليتين ولوحظ عدد الصور الظاهرة.

في هذه التجربة تكون مجموعة عناصر الفضاء العيني

(Ω) = {(ص،ص)، (ص،ك)، (ك،ص)، (ك،ك)}.

ما عدد عناصر الفضاء العيني؟

أُكملُ الجدول الآتي:

الفضاء العيني	(ص،ص)	(ص،ك)	(ك،ص)	(ك،ك)
عدد الصور الظاهرة	٢			

إِذا عبّرنا عن عدد الصور الظاهرة على الوجهين العلويين بالمتغير س، فإِن قيم س هي: ٠ ، ١ ، ٢. ويُسمّى المتغير س المتغير العشوائيّ.

تعريف: المتغيّر العشوائيّ: هو متغير يأخذ قيماً عددية تحددها نتائج تجربة عشوائية ما.

ملاحظة: إِذا كانت قيم المتغير العشوائي قابلة للعد يسمى متغيراً عشوائياً منفصلاً.

مثال : باقة من الأَزهار فيها ٦ أزهار حمراء، و٤ أَزهار بيضاء. تم اختيار٣ زهرات عشوائياً. إِذا كان المتغير العشوائي ص يمثّل عدد الأزهار البيضاء. أَكتبُ قيم ص.

الحل : قيم ص هي: صفر ، ١ ، ٢ ، ٣. أُفسِّر ذلك؟

نشاط ٤: قرص دوار كما في الشكل المجاور عليه ثلاثة أَرقام هي: ٣ ، ٥ ، ٧ ، إِذا أَدرنا القرص مرتين حيث يُشير المؤشر في كل مرة على أَحد الأَرقام الثلاثة، وكان س يمثِّل مجموع الرقمين الناتجين.



Ω = {(٣،٣)، (٥،٣)، (٧،٣)، (٣،٥)، (٥،٥)،
(٧،٥)، (٣،٧)، (٥،٧)، (٧،٧)}.

إِذا كان الرقمان الناتجان هما (٣،٣) فإِن مجموعهما = ٦

إِذا كان الرقمان الناتجان هما (٥،٧) فإِن مجموعهما = ـــــ ، .

باقي قيم س: ـــــ ، ـــــ ، ـــــ .

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي

نشاط ٥: أَظهر تقريرٌ لجهاز الإِحصاء المركزيّ الفلسطينيّ عام ٢٠١٣م أَن متوسط حجم الأُسرة في فلسطين قد بلغ حوالي ٥ أَفراد.

تم اختيار عائلة عشوائياً لديها ٣ أَطفال، وكان المتغير العشوائي س يمثل عدد الأَطفال الذكور في العائلة.

أُكملُ الجدول الآتي:

الفراغ العيني	(و، و، و)		(و، ب، و)				(ب ، ب، و)	(ب ، ب، ب)
قيم المتغير العشوائي س	٣							
احتمال حدوث الحادث ل(س)	$\frac{١}{٨}$						$\frac{٣}{٨}$	

احتمال الحادث (و، و، و) = $\frac{\text{عدد عناصر الحادث}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{١}{٨}$

ما مجموع الاحتمالات المقابلة لقيم المتغير العشوائي جميعها في الجدول أَعلاه؟ ماذا تُلاحظ؟

تشكّل قيم المتغير العشوائي س مع الاحتمالات المقابلة لها ل(س) ما يسمّى بالتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س، ويمكن التعبير عنه على صورة جدول أَو مجموعة أَزواج مرتبة على صورة (س ، ل(س)).

أتعلم: في كل توزيع احتمالي يكون:

- احتمال كلّ قيمة من قيم المتغير العشوائي $\geq$ ل(س) $\geq$ ١
- مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي جميعها = ١

نشاط ٦: في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين مرة واحدة. عُرِّف المتغير العشوائي س بأنه الفرق المطلق بين العددين الظاهرين على الوجهين العلويين، أُكملُ الجدول الآتي:

الحجر الأول / الحجر الثاني	١	٢	٣	٤	٥	٦
١					٤	
٢		٠				
٣				١		٣
٤			١			
٥						
٦	٥			٢		

إذا ظهر على الوجهين العلويين الرقمين (٣ ، ١) أو (١ ، ٣) فإن الفرق المطلق بين العددين الظاهرين في كلتا الحالتين = ٢، لماذا؟

أُكوِّنُ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيّ:

قيم س	٠	١		٣		٥
قيمة الاحتمال ل(س)			$\frac{٨}{٣٦}$		$\frac{٤}{٣٦}$	

مثال: يمثِّلُ الجدول التالي توزيعاً احتمالياً للمتغير العشوائي ص، فإذا كانت ب = ٤أ.

أَحسبُ قيمة كل من أ ، ب.

ص	٦	٨	١٠
ل(ص)	٠,١	ب	٢أ

الحل : مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي جميعها = ١، ب = ٤أ

١ , ٠ + ب + ٢أ = ١

١ , ٠ + ٤أ + ٢أ = ١ . لماذا؟

٦أ = ٩ , ٠

أ = ١٥ , ٠ . أُوضِّح ذلك.

ب = ٤ × ١٥ , ٠ = ٦ , ٠

تمارين ومسائل ٢-٣:

١ أَكتب القيم التي يتخذها المتغير العشوائي في كل حالة من الحالات الآتية:

أ عدد الأَطفال الإِناث في عائلة تم اختيارها عشوائياً من العائلات التي لديها ٦ أَطفال.

ب عدد الرجال في مجموعة من ٣ أَشخاص تم اختيارها عشوائياً من نادٍ علميّ فيه ٦ رجال و٤ نساء.

جـ مربّع عدد الصور الظاهرة على الوجهين العلويين في تجربة إِلقاء قطعة نقد منتظمة مرتين.

٢ أي من التوزيعات الآتية يعدّ توزيعاً احتمالياً؟ ولماذا؟

أ {(١ ، ٢ , ٠) ، (٣ ، ٥ , ٠) ، (٢ ، ٤ , ٠)}

ب {(١ ، ٣ , ٠) ، (٨ ، ٣ , ٠) ، (٥ ، ٤ , ٠)}

جـ {(س ، ل(س)) حيث ل(س) = $\frac{\text{س}}{٥٠}$ ، س = ١٣ ، ١٧ ، ٢٠}

٣ إِذا كان س متغيراً عشوائياً يتخذ القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، وكان ل (س) = أس^{٢}:

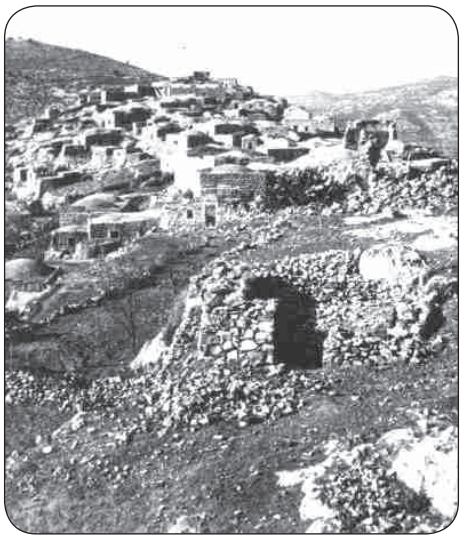
أ أجدْ قيمة الثابت أ.

ب أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

٤ صندوقان في كل منهما ثلاث كرات، الأَول كراته مرقمة ٣ ، ٤ ، ٥ والثاني بالأَرقام ٦ ، ٧ ، ٨ سُحبت كرة عشوائياً من كل صندوق، وكان المتغير العشوائي س هو ناتج ضرب العددين المكتوبين على الكرتين المسحوبتين، أَكتبُ التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

٥ أفكر : في تجربة سحب ٣ كرات بدون ارجاع بشكل عشوائي من صندوق فيه ٣ كرات حمراء، وكرتان بيضاويتان إِذا كان المتغير العشوائي س يمثِّلُ عدد الكرات الحمراء، أكتب قيم س.

٤ - ٢ توقّع المتغير العشوائي المنفصل
Predicting The Separate Random Variable



نشاط ١: دمّر الاحتلال الصهيوني عام ١٩٤٨م عدداً كبيراً من القرى الفلسطينية، منها: ٣٠ قرية قضاء عكا ، و ٦٥ قرية قضاء الرملة، و ٥ قرى قضاء الناصرة.

أَراد باحث من مدينة بئر السبع دراسة معالم القرى المدمرة في المدن الثلاث، فقام بجولة ميدانية لكل قرية بكلفة ٣٠ ديناراً للقرية الواحدة في قضاء الرملة، و٣٥ ديناراً للقرية في قضاء الناصرة، و٤٠ ديناراً للقرية في قضاء عكا، ما متوسط تكلفة زيارة القرية المدمرة الواحدة؟

مجموع ما يدفعه الباحث في جولته الميدانية= ٣٠ × ٦٥ + _____ + _____ = ٣٣٢٥ ديناراً.

الوسط الحسابي للمبلغ الذي يدفعه في زيارة القرية الواحدة = $\frac{٣٣٢٥}{١٠٠}$ = ٣٣,٢٥ ديناراً.

ويمكن الحصول على الوسط الحسابي بضرب قيم المتغير العشوائي وهي: ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠ في التكرارات النسبية المقابلة لها (الاحتمالات) ٠,٦٥ ، ٠,٠٥ ، ٠,٣٠ على الترتيب ثم جمع حواصل الضرب، كما هو موضح في الجدول الآتي:

قيم المتغير العشوائي(س)	٣٠	٣٥	٤٠	مجموع (س × ل(س))
التكرار النسبي (الاحتمال) = ل(س)	٠,٦٥	٠,٠٥	٠,٣٠	
س × ل(س)	١٩,٥	١,٧٥	١٢	٣٣,٢٥

الوسط الحسابي للمبلغ الذي يدفعه في زيارة القرية الواحدة

= ٣٠ × ٠,٦٥ + ٣٥ × ٠,٠٥ + ٤٠ × ٠,٣ = ٣٣,٢٥ ديناراً.

أُقارنُ بين الإِجابتين.

تعريف: **إذا كان س متغيراً عشوائياً منفصلاً يأخذ القيم $س_1$ ، $س_2$ ، ..... $س_ن$ باحتمالات مقابلة $ل(س_1)$ ، $ل(س_2)$ ، ..... ، $ل(س_ن)$ على الترتيب فإن توقع س ويُرمز له ت (س) ويساوي**

$$س_1 \times ل(س_1) + س_2 \times ل(س_2) + ... + س_ن \times ل(س_ن)$$

ويكتب بالصورة $ت(س) = \sum_{ر=1}^{ن} (س_ر \times ل(س_ر))$.

نشاط ٢: يربح صاحب أَحد المتنزهات مبلغ ١٢٠ ديناراً في اليوم المشمس، ويخسر ٢٠ ديناراً في اليوم غير المشمس، إذا كان احتمال اليوم المشمس هو ٠,٨ ما توقعك للربح اليومي لصاحب المتنزه؟

احتمال اليوم غير المشمس = ١ − ٠,٨ = ٠,٢

قيم المتغير العشوائي س هي: -٢٠ ، ١٢٠، هل هناك قيم أُخرى؟

لإيجاد توقع الربح اليومي لصاحب المتنزه، أُكملُ الجدول الآتي:

س	-٢٠	
ل(س)		٠,٨

ت(س) = _____.

أَجدُ توقع الربح اليومي لصاحب المتنزه بطريقة أُخرى.

نشاط ٣: إذا كانت قيمة مبيعات إِحدى المحلات التجارية في مدينة أَريحا خلال عشرة أَيام كما هو مبين في الجدول الآتي:

المبيعات بالدينار	١٠٠	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠
عدد الأَيام	٤	٣	٢	١

إذا كان المتغير العشوائي س يمثّل قيمة مبيعات المحل اليوميّة.

١ أَجدُ القيمة المتوقعة للمبيعات.

قيم المتغير العشوائي (س) هي: ١٠٠، ١٥٠، ٢٠٠، ٢٥٠. لماذا؟

احتمال أَن تكون مبيعات المحل (١٠٠) دينار = ٠,٤. أُوضِّح ذلك.

أُكملُ الجدول الآتي:

س	١٠٠	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠
ل(س)	٠,٤			٠,١

القيمة المتوقعة للمبيعات = ١٥٠ ديناراً. أُوضِّحُ ذلك؟

٢ أَجدُ: ت(٢س)

ت(٢س) = (٢ × ١٠٠) × ٠,٤ + (٢ × ١٥٠) × ٠,٣ + _____ + _____ = ٣٠٠.

أتعلم: ليكن س متغيراً عشوائياً توقعه ت(س)، أ ، ب ∋ ح فإنه يمكن إيجاد:
ت(أ س ± ب) باستخدام الخاصية الآتية: ت(أ س ± ب) = أ ت(س) ± ب.

أَجد: ت(٢س) باستخدام الخاصية السابقة، أُقارنُ الإِجابتين.

مثال : إِذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي س كما في الجدول الآتي:

س	٠	٢	٤	٦
ل(س)	٠,٣	٠,٢	٠,٤	ب

١ أَحسبُ قيمة ب.

٢ أَحسبُ ت(س)

٣ إِذا كان المتغير العشوائي ص = ٢س + ٣ ، أَحسبُ ت(ص).

الحل : ١ قيمة ب.

مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائيّ جميعها = ١

٠,٣ + ٠,٢ + ٠,٤ + ب = ١

٠,٩ + ب = ١

ومنها ب = ٠,١

٢ ت(س) = ٠ × ٠,٣ + ٢ × ٠,٢ + ٤ × ٠,٤ + ٦ × ٠,١

= ٢,٦

٣ ت (ص) = ٢ × ٢,٦ + ٣ = ٨,٢

تمارين ومسائل ٢-٤:

١ إذا كان التّوزيع الاحتمالي للمتغير س مُعطى كما في الجدول الآتي:

س	٠	٥	١٠	١٥
ل(س)	٠,٢٥	٠,١٥	أ	٠,٣

أ أَجِد: قيمة أ.

ب أَجِد: ت(س).

جـ أَجِد: ت (٢س + ٧).

٢ يُطلق شخص سهماً على قرص، حيث يكسب ١٦ نقطة في حال أَصابته، ويخسر ٨ نقاط إذا لم يصبه، إذا كان احتمال إصابته = ٠,٤، فما توقّعك لعدد النقاط التي يحصل عليها هذا الشخص في الرمية الواحدة.

٣ أَحسبُ توقع عدد الأَطفال الإِناث في عائلة لديها ثلاثة أَطفال.

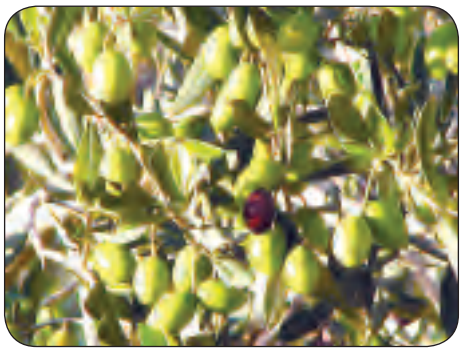
٤ يربح فندق في مدينة رام الله يومياً ٨٠٠ دينار في فصل الصيف، و٤٠٠ دينار في فصلي: الربيع والخريف، ويخسر ٢٠٠ دينار في فصل الشتاء، أَحسبُ توقعك لربح الفندق اليومي؟

٥ إذا كان ت(٧س + ٢٥) = ٤٩، أَحسبُ ت(س).

٦ **أفكر:** إذا كان ص متغيراً عشوائياً منفصلاً توقعه = ٥٠، س متغيراً عشوائياً آخر بحيث أن:
ص = أ س – ٤. أَحسبُ قيمة أ إذا كانت قيمة ت (س) = ١٨.

٢ - ٥ التجارب العشوائية ذات الحدين Randomized Binomial Experiments

نشاط ١:



شجرة الزيتون شجرة مُباركة مُعمرة، وتعتبر ثروة لما لها من فوائد اقتصادية، لذا يلجأُ المزارعون في فلسطين إِلى التطعيم لتحسين إِنتاج هذه الشجرة.

لاحظ مواطن أَن لدية ٨ أَشجار زيتون إِنتاجيتها متدنية، فأَراد تطعيم ثلاث منها كتجربة لتحسين إِنتاجها، وكانت نسبة (احتمال) نجاح تطعيم الشجرة الواحدة = ٠,٨

فشل تطعيم أَي شجرة لا يؤثر على نسبة نجاح تطعيم الأَشجار الأُخرى. لماذا؟

عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار ٣ أشجار من الأَشجار الثمانية

$$= \binom{٨}{٣}^{*} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥!}{٣! \times ٥!} = ٥٦$$

نسبة (احتمال) فشل تطعيم كلّ شجرة = _____.

تُسمّى مثل هذه التجارب بالتجارب العشوائية ذات الحدين.

تعريف: التجربة ذات الحدين: هي كل تجربة تحقق الشروط الآتية:

١ **تتألف التجربة من عدد معين من المحاولات المتكررة (ن) والمتماثلة والمستقلة تحت الظروف نفسها.**

٢ **نتيجة كل محاولة إِما النجاح أَو الفشل.**

٣ **احتمال النجاح في كل محاولة ثابت.**

ومن أَمثلة التجارب العشوائية ذات الحدين: السحب على التوالي مع الإِرجاع، إِلقاء حجر نرد منتظم ٥ مرات متتالية، التسديد على مرمى كرة القدم.

* مفكوك $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر! \times (ن - ر)!}$

في التجارب الاحتمالية ذات الحدين: إذا كان (ن) عدد المحاولات المستقلة للتجربة، أ احتمال النجاح في كل محاولة، س عدد مرات النجاح فإن:

$$ل(س) = \binom{ن}{س} \times أ^{س} \times (١ - أ)^{ن - س}$$

حيث ن عدد صحيح موجب، أ عدد حقيقي موجب أصغر من ١ ، س = صفر ، ١ ، ٢ ، ....، ن.

نشاط ٢: نسبة استجابة المرضى لنوع معين من العقاقير الطبية هو ٠,٧ ، إذا تناول هذا العقار ٣ مصابين.

وعرف المتغير العشوائي س بأنه عدد حالات الاستجابة لهذا العقار.

قيم المتغير العشوائي س: ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣.

التجربة تجربة عشوائية ذات حدين. لماذا؟

أُكملُ الجدول الآتي:

عدد مرات إجراء التجربة (ن)	
احتمال النجاح في كل محاولة (أ)	
احتمال الفشل في كل محاولة (١ – أ)	
قيم المتغير العشوائي (س)	
احتمال استجابة ثلاثة مرضى للعقار	$ل(٣) = \binom{٣}{٣} \times \left(\frac{٧}{١٠}\right)^{٣} \times \left(\frac{٣}{١٠}\right)^{٣-٣} = ٠,٣٤٣$
احتمال استجابة مريض واحد للعقار	
احتمال عدم استجابة أي مريض للعقار	$ل(٠) = \binom{٣}{٠} \times \left(\frac{٧}{١٠}\right)^{٠} \times \left(\frac{٣}{١٠}\right)^{٣} = ٠,٠٢٧$

أفكر: ما احتمال استجابة مريض واحد على الأقل؟

نشاط ٣: في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم ١٠ مرات متتالية. أُناقشُ فرصة احتمال الحصول على عدد أولي ٣ مرات فقط.

التجربة ذات حدين. لماذا؟

احتمال الحصول على عدد أولي في الرمية الواحدة = _____

احتمال الحصول على عدد أولي في ٣ مرات فقط = ل(٣) = $\binom{١٠}{٣} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٧}$ ، أُوضِّحُ ذلك؟

إذن ل(٣) = $\frac{١٥}{١٢٨}$. لماذا؟

نشاط ٤: معرض سيارات فيه ٢٥سيارة من بينها ٥ سيارات قديمة، تم اختيار٣ سيارات عشوائياً. ما احتمال أن تكون سيارة واحدة على الأكثر منها قديمة ؟

التجربة ذات حدين فيها أ = _____ ، ١ – أ = _____.

احتمال أن تكون سيارة واحدة قديمة = $\frac{١}{٥}$.

احتمال أن تكون سيارة واحدة قديمة على الأكثر = ل(س ≤ ١).

ل(س ≤ ١) = ل(٠) + ل(١) .

= $\binom{٣}{٠} \times \left(\frac{١}{٥}\right)^{٠} \times \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٣}$ + _____ .

= ٠,٥١٢ + ٠,٣٨٤ . أُوضِّحُ ذلك.

= ٠,٨٩٦

تعريف: **إذا كان س متغيراً عشوائياً لتجربة ذات حدين فإن:**

توقع المتغير العشوائي (س) = ت(س) = ن × أ .

حيث ن : عدد مرات إجراء التجربة، أ : احتمال النجاح.

مثال ١ : س متغير عشوائي في تجربة ذات حدين حيث ن = ٨٠، أ = ٠,٦ . أَجدُ ت(س).

الحل : ت(س) = ن × أ

= ٨٠ × ٠,٦ = ٤٨.

مثال ٢ : تريد لجنة المشتريات في مديرية التربية والتعليم/ جنين فحص٤٠ جهاز حاسوب للتأكد من مطابقتها للمواصفات المطلوبة، فإذا كانت نسبة نجاح فحص الجهاز الواحد ٠,٨٠، ما توقعك لعدد الأجهزة التي تطابق المواصفات المطلوبة؟

الحل : عدد الأجهزة = ٤٠ جهازاً.

احتمال النجاح = ٠,٨٠

ت (س) = ن × أ

= ٤٠ × ٠,٨٠ = ٣٢ جهازاً.

تمارين ومسائل ٢ - ٥:

١ في تجربة عشوائية ذات حدين إذا كانت ن = ٦ ، أ = ٠,٤ ، أَجدْ:

أ ل(س = ٢) ب ل(س < ٤)

٢ في تجربة إِلقاء قطعة نقد منتظمة ٤ مرات متتالية، إِذا كان المتغير العشوائي س يمثِّل عدد الصور الظاهرة على الوجه العلوي، أَجدْ:

أ قيم المتغير العشوائي (س).

ب احتمال ظهور الصورة مرتين فقط.

٣ إِذا كان ١٠٪ من طلبة مدرسة ما مصابين بالزّكام، تم اختيار٣ طلبة عشوائياً من المدرسة، أَحسبُ احتمال أَن يكون اثنان منهم سليمين.

٤ في دراسة إِحصائية تبيّن أَن ٧٥٪ من الطلبة يستخدمون الشبكة العالمية (الانترنت)، تمّ اختيار ٥ طلبة عشوائياً، ما احتمال أَن يكون ٣ منهم، على الأَقل، من مستخدمي هذه الشبكة؟

٥ في مدينة ما كان ٥٠٪ من سكانها يجيدون التحدث باللغة الإِنجليزية، تم اختيار ١٠ أَشخاص من سكان المدينة عشوائياً، ما احتمال أَلا يجيد أَحدهم التحدّث باللغة الإِنجليزية؟

٦ إِذا كان احتمال أَن يجتاز الشخص الواحد لأَحد الحواجز المنصوبة على واحد من مداخل مدينة بيت لحم ٠,٦ ، فما توقعك لعدد المواطنين الذين سيجتازون الحاجز من بين ٢٠٠ مواطن ينتظرون على الحاجز؟

٧ في تجربة إِلقاء حجر نرد منتظم ٧٢ مرة، ما توقعك لعدد مرات ظهور عدد يقبل القسمة على ٦؟

٨ أفكر : إِذا كان احتمال فوز فريق في المباراة الواحدة هو ٠,٧ ، لعب الفريق ١٠ مباريات، ما توقعك لعدد المباريات التي سيخسرها الفريق؟

تمارين عامة:

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ أي من الآتية يُعتبر أداة لجمع البيانات؟

أ) العينة العرضية ب) المقابلة جـ) حل المشكلات د) الحصر الشامل

٢ ما العينة غير الاحتمالية فيما يأتي؟

أ) كرة الثلج ب) العينة العشوائية جـ) العينة الطبقية د) العينة العنقودية

٣ إذا كانت س متغيراً عشوائياً وكانت ت (٣ س− ١) = ١٤ ، فإن ت (س) =

أ) ٣ ب) ٥ جـ) ١٥ د) ٤٥

٤ إذا كان احتمال أن يتخرج طالباً التحق بكلية الهندسة هو (٠,٧)، فإذا التحق بهذه الكلية ٣ أصدقاء، ما احتمال أن لا يتخرج منهم أحد؟

أ) ٠,٠٢٧ ب) ٠,٠٨١ جـ) ٠,٣٤٣ د) ٠,٤٢

٥ اختيار مجموعة من الطلبة المشتركين في أعمال فنية لمعرفة مشكلاتهم أثناء العمل الفني أو إقامة المعارض. ما نوع العينة المختارة؟

أ) قصدية ب) عرضية جـ) عشوائية بسيطة د) منتظمة

٦ إذا كان س متغيراً عشوائياً يمثّل عدد الوجبات التي يتناولها أحد نزلاء الفنادق (فطور، غداء، عشاء) في أحد الأيام، ما قيم المتغير العشوائي س؟

أ) ٠، ١، ٢ ب) ٣ جـ) ١، ٢، ٣ د) ٠، ١، ٢، ٣

٧ في تجربة ذات حدين، إذا كانت ن = ٥ ، أ = ٠,٢ ، س = ٣ فما قيمة ل(س)؟

أ) ٠,٦٤٦٤ ب) ٠,٦٥٦٥ جـ) ٠,٠٥١٢ د) ٠,٠١٥٢

٨ في تجربة ذات حدين ما المقصود بـ «احتمال الحصول على ٤ نجاحات على الأقل»؟

أ) ل(س > ٤) ب) ل(س ≥ ٤) جـ) ل(س < ٤) د) ل(س ≤ ٤)

٢ يُراد اختيار عينة عدد أفرادها ٦٠ طالباً من مدرسة بها ٣٠٠ طالب مكونة حسب الجدول الآتي:

الصف	الحادي عشر/ أدبي	الحادي عشر/ رياضي	الحادي عشر/ علمي
العدد	١٢٠	١٢٠	٦٠

أوضِّح الطريقة التي يتم فيها اختيار العينة.

٣ يُطلق أحد المستوطنين النار على السيارات المارة في إحدى الطرق، إذا كان احتمال إصابته للسيارة في الطلقة الواحدة هو ٠,٧، أطلق المستوطن النار على ١٠ سيارات، ما توقعك لعدد السيارات التي أُصيبت؟

٤ إذا كان عدد الطلبة الملتزمين بحلّ واجباتهم البيتية في إحدى الصفوف ١٨ طالباً وغير الملتزمين ١٢ طالباً، تمّ اختيار ٥ طلبة عشوائياً. ما احتمال أن يكون واحداً منهم، على الأكثر، من الملتزمين بحلّ واجباته؟

٥ مصنع للأقمشة فيه ١٥٠٠ عامل. أرادت إدارة المصنع أن تعرف رأي العمال في طرق تحسين بيئة العمل في المصنع، فقررت استخدام عينة منتظمة حجمها ١٥٠ عاملاً.

أ ما مقدار المسافة الثابتة بين مفردات العينة؟

ب إذا كان الرقم ٦ يُمثل رقم أول عامل تم اختياره عشوائياً في العينة، ما أرقام أول ٥ عمال تم اختيارهم؟

أقيّم ذاتي أعبر بلغتي عن نقاط القوة ونقاط الضعف لكل مفهوم من المفاهيم الواردة في هذه الوحدة بما لا يزيد عن أربعة أسطر.

فكرة ريادية

الموضوع / إتلاف الممتلكات والمرافق العامة في المدرسة وتخريبها

تُعاني الكثير من المدارس من ظاهرة إتلاف الممتلكات والمرافق العامة وتخريبها مما يؤثّر سلبياً على الطلبة والبيئة المدرسية في جوانب عديدة.

أُعدّ مشروعاً أتناول فيه أسباب هذه الظاهرة والنتائج المترتبة على انتشارها. وأقترح أفضل الحلول التي تُسهم في تقليص حدتها والآثار المترتبة عليها.



روابط إلكترونية



- http://www.pcbs.gov.ps/site/lang__ar/635/default.aspx
- https://www.ehmuda.com/searchtools.htm

الوحدة

٣

المتتاليات



أُلاحظ صورة انقسام الخلية في الطور الأول إلى خليتين، في أي طور يصبح عدد الخلايا ٣٢ خلية؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المتتاليات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ التعرّف إلى مفهوم المتتالية الحسابية.
٢ استنتاج الحدّ العام للمتتالية الحسابية.
٣ إدخال عدد من الأَوساط الحسابيّة بين عددين.
٤ التعرّف إلى المتتالية الهندسية.
٥ التمييز بين المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية.
٦ إدخال عدد من الأَوساط الهندسية بين عددين.

«طريق الألف ميل تبدأ بخطوة ثم تتوالى الخطوات....».

١ - ٣ المتتاليات Sequences

نشاط ١: جاء في بيانات مركز الإحصاء الفلسطينيّ ووزارة الاتصالات لعام ٢٠١٤م أن عدد مشتركي الهاتف النقّال قد بلغ حوالي ٣ ملايين مشترك.

وبسبب زيادة الطلب على خطوط الهاتف، زادت المبيعات في خطوط شركتي اتصال في إحدى السنوات «مقربة لأقرب ألف» بزيادة متساوية كما في الجدول الآتي:

الشهر	كانون ثاني	شباط	آذار	نيسان	أيار	.....	كانون أول
عدد خطوط الشركة الأُولى	٢	٤	٦	٨	___	.....	___
عدد خطوط الشركة الثانية	٧	٨	٩	١٠	___	.....	___

أَتأَمّلُ الجدول السابق ثم أُجيب عما يأتي:

بلغت الخطوط المبيعة في شهر أيار في كلتا الشركتين: الأُولى _____ ، الثانية _____ .

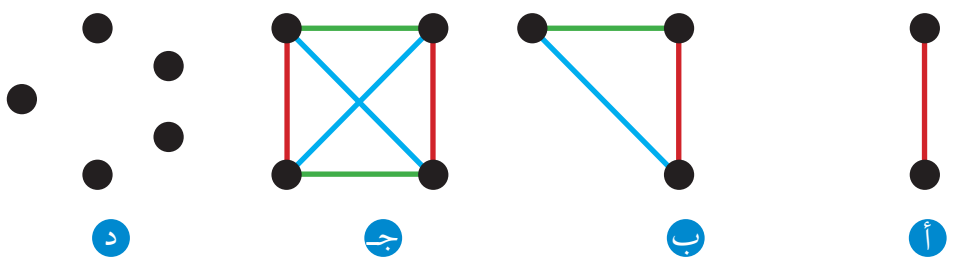
الشهر الذي تكون فيه المبيعات الشهرية متساوية في الشركتين: _____ .

يمكن كتابة عدد الخطوط المبيعة في الشركة الأُولى على الصورة: ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...

عدد الخطوط المبيعة في الشركة الثانية بالصورة نفسها: _____ ، _____ ، _____ ، _____ ، ...

أتعلم: تسمى الأَعداد التي تكتب على صورة: $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ... ، $س_ن$ بالمتتالية.

نشاط تعاوني ٢: أَتأَملُ الشكل الآتي ثم أُجيبُ عن الأَسئلة الآتية:



عد القطع المستقيمة الواصلة بين النقاط في الشكل السابق الفرع (د): _____ .

المتتالية التي تُمثّل عدد القطع المستقيمة في الشكل السابق: ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠

عدد القطع المستقيمة إذا احتوى الشكل على ٦ نقاط : _____ .

عدد القطع المستقيمة إذا احتوى الشكل على ٧ نقاط : _____ .

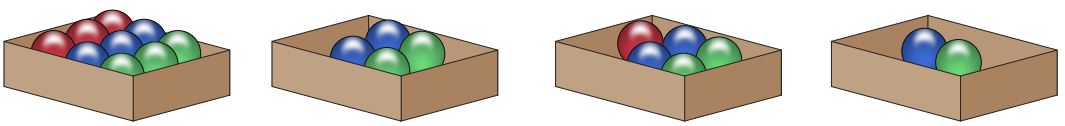
أتعلم: تصنف المتتالية من حيث عدد الحدود إلى نوعين متتالية منتهية وغير منتهية.

نشاط ٣: المتتالية $-٥ ، -٢ ، ١ ، \ldots ، ٢٢$ متتالية منتهية لأَننا نستطيع عدّ حدودها.

المتتالية $\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \ldots$ متتالية غير منتهية. (لماذا)؟

أُعطي مثالاً على متتالية منتهية ومثالاً على متتالية غير منتهية.

نشاط ٤: مجموعة من الصناديق موضوعة بشكل متتالٍ وفي كل صندوق عدد من الكرات كما في الشكل الآتي:



(١) (٢) (٣) (٤)

	الصندوق الأَول	الصندوق الثاني	الصندوق الثالث	الصندوق الرابع
الرمز الذي يعبّر عن عدد الكرات (ح)		$ح_{٢}$		
عدد الكرات (قيمة الحد)		٥		٩

يُرمز للحد الأَول في المتتالية بالرمز: $ح_{١}$.

يُرمز للحد الثالث بـ: _____، ويرمز للحد النوني بـ: _____.

ترتيب (رتبة) الصندوق الذي عدد كراته ٤: _____ .

تعريف: **المتتالية : هي اقتران مجاله مجموعة الأَعداد الصحيحة الموجبة أَو جزء منها على النمط {١ ،٢، ٣، ...، ن} ومداه مجموعة جزئية من الأَعداد الحقيقية.**

نشاط ٥:

في المتتالية : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٠ .

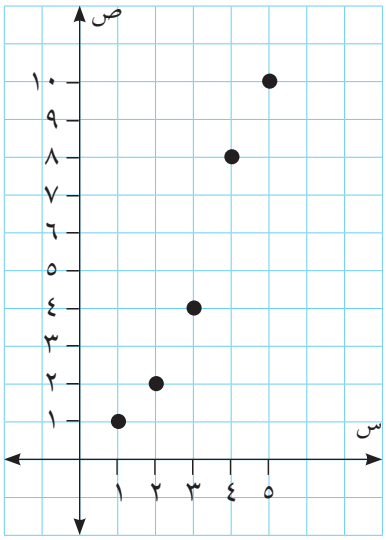
يمكن كتابة المتتالية على الصورة:

(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ١٠)

مجال هذه المتتالية : _____ .

مدى هذه المتتالية : _____ .

التمثيل البياني للمتتالية كما في الشكل المجاور.



نشاط ٦:

يريد شخص كتلته ١١٠ كغم انقاص كتلته بمعدل ٥ كغم كل شهر عن طريق نظام غذائي لمدة ٦ أشهر.

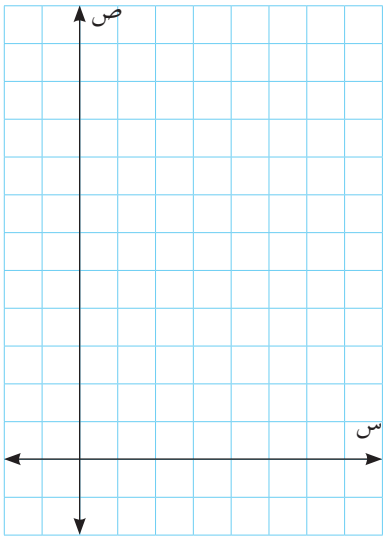
مجال المتتالية : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ . لماذا؟

المتتالية على شكل أزواج مرتبة :

(١ ، ١٠٥) ، (٢ ، ١٠٠) ، (٣ ، ٩٥)

(٤ ، ٩٠) ، (٥ ، ٨٥) ، (٦ ، ٨٠).

أُمثّلُ المتتالية بيانياً في الشكل المجاور.



الحد العام للمتتالية:

نشاط ٧: أَرادت مؤسسة اختيار عينة حجمها ٨٠ شخصاً من المشاركين في ندوة علمية والبالغ عددهم ٤٠٠ شخص باستخدام طريقة العينة العشوائية المنتظمة حيث كان رقم الشخص الأَول يساوي ٣. أَجِدُ رقم الشخص الأَخير في العينة.

أُكملُ الجدول الآتي:

	رقم الشخص الأَول ($ح_1$)	رقم الشخص الثاني ($ح_2$)	رقم الشخص الثالث ($ح_3$)	رقم الشخص الرابع ($ح_4$)		رقم الشخص الاخير ($ح_{80}$)
المتتالية التي تُمثل أرقام العينة ٣، ٨، ١٣، ...	٥ × ١ – ٢	٥ × ٢ – ٢	٥ × ٣ – ٢		....	

الحد العام هو $ح_ن = ٥ن - ٢$

هل $ح_{10} = ٤٨$ في المتتالية السابقة ؟ لماذا؟.

أفكر : هل العدد ١٧٧ هو أَحد أَرقام العينة؟

مثال : أَكتبُ الحدود الثلاثة الأُولى من المتتاليات التي حدها العام $ح_ن = ٣ن + ١$.

الحل : $ح_1 = ٣ \times ١ + ١ = ٤$ ، $ح_2 = ٣ \times ٢ + ١ = ٧$ ، $ح_3 = ٣ \times ٣ + ١ = ١٠$

نشاط ٨: أُكمل الجدول الآتي :

	$ح_1$	$ح_2$	$ح_3$	....	$ح_ن$
في المتتالية ٣، ٩، ٢٧،		٣^2	٣^3	....	

$ح_5 =$ _____ ، $ح_8 =$ _____ .

أناقش : هل يوجد قاعدة لكل متتالية؟ أُعطي مثالاً على ذلك.

نشاط ٩: في الشكل المجاور المتتالية التي تُمثّل عدد المثلثات ابتداءً من القمة، هي:

١ ، ٣ ، ٥ ، ...



الحد العام الذي يمثّل عدد المثلثات $(ح_ن)$: _____ .

عدد المثلثات في الصف العشرين $(ح_{٢٠})$: _____ .

تمارين ومسائل ٣-١:

١ أكتب الحدود الستة الأُولى في كل من المتتاليات الآتية:

أ ٨ ، ٤ ، ٢ ، .....

ب $\frac{١}{٤ \times ٢}$ ، $\frac{٣}{٦ \times ٤}$ ، $\frac{٥}{٨ \times ٦}$ ، .....

جـ $ح_ن = ٣ - ٥ن$

د $ح_ن = \frac{ن}{ن^٢ + ١}$

هـ $ك_ن = ك_{ن-١} - ٢$ ، علماً أن $ك_١ = ٣$

٢ أُكمل المتتاليات الآتية، ثم أُمثّلها بيانياً.

أ $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ... ، ... ، ...

ب ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ... ، ... ، ...

٣ أَجِدْ الحد العام في كل من المتتاليات الآتية:

أ ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...

ب ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...

جـ $\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٣}{٤}$ ، ...

٤ استطاع أَحد الرياضيين مضاعفة ما ربحه ٣ مرات وذلك في كل مرحلة من مراحل المسابقة السبع التي يستطيع تجاوزها. أكتب المتتالية التي تمثل ربح المتسابق في كل مرحلة، ثم أَجِدْ الحد العام إذا علمت أَن ما كسبه في المرحلة الأُولى ١٠٠ دينار.

٢ - ٣ المتتالية الحسابية Arithmetic Sequence

نشاط ١:



تُعدّ أَزمة المياه في فلسطين إِحدى أهم المشكلات الناتجة عن ممارسات الاحتلال الصهيوني المنهجة ضد مصادر المياه.

اتفق مقاول مع أَحد المزارعين المتضررين من هذه الممارسات على حفر خزان لتجميع المياه عمقه ٨ أَمتار، على أَن يتقاضى ٢٠ ديناراً عن أَول متر يقوم بحفره و٢٥ ديناراً عن المتر الثاني وهكذا. ما يتقاضاه المقاول عن كل متر هو عبارة عن متتالية حدودها:

٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، _____ ، _____ ، _____ ، _____ ، _____ .

الزيادة التي يتقاضاها المقاول عن كل متر إِضافيّ: _____ .

نشاط ٢:

أَتأَمّلُ المتتالية $-٥ ، -٨ ، -١١ ، -١٤ ، \ldots$

الفرق بين الحد الثاني والأَول: _____ .

الفرق بين الحدين الثالث والثاني: _____ .

ماذا أُلاحظ؟

تُسمّى مثل هذه المتتاليات بالمتتاليات الحسابية

تعريف: المتتالية الحسابية: هي المتتالية التي يكون الفرق فيها بين الحد وسابقه مقداراً ثابتاً دائماً ويسمى هذا الثابت أَساس المتتالية الحسابية ويُرمز له بالرمز (د) كما يرمز للحد الأَول بالرمز (أ) وتكتب على الصورة: أ ، أ + د ، أ + ٢د ، أ + ٣د ، ...

مثال ١ : في المتتالية الحسابية الآتية: $-٢٦ ، -٢٣ ، -٢٠ ، -١٧ \ldots$ أَجِدُ:

١ الحد الأَول للمتتالية وأَساسها.

٢ الحد الخامس.

الحل :

١ الحدّ الأَول للمتتالية $(أ) = -٢٦$

أَساس المتتالية $(د) = -٢٣ - (-٢٦) = ٣$

٢ $ح_٥ = أ + ٤د = -٢٦ + ٤ \times ٣ = -١٤$

نشاط ٣: أُميّز المتتالية الحسابية فيما يأتي، ثم أَجِدْ أَساسها وحدها الأَول.

١ $٢ ، ٦ ، ١١ ، ١٧ ، \ldots$

المتتالية $٢ ، ٦ ، ١١ ، ١٧ ، \ldots$ ليست متتالية حسابية لأَن الفرق بين أَي حد وسابقه ليس ثابتاً.

٢ $ح_١ = ٣ن - ٢$. وتُكتب المتتالية على الشكل:

$١ ، ٤ ، ٧ ، _____$.

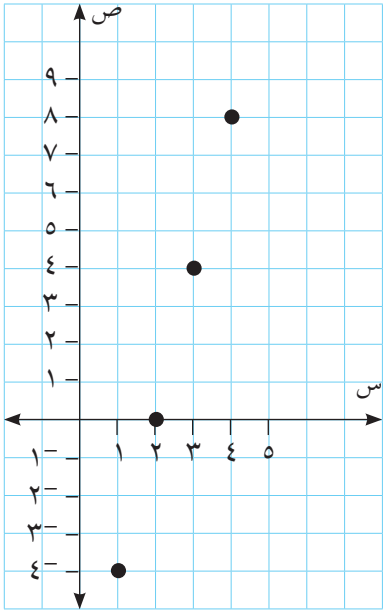
متتالية حسابية وأَساسها = ٣ وحدها الأَول ١

٣ $١ ، -١ ، ١ ، -١ ، \ldots$ متتالية: _____ .

لأَن : _____ .

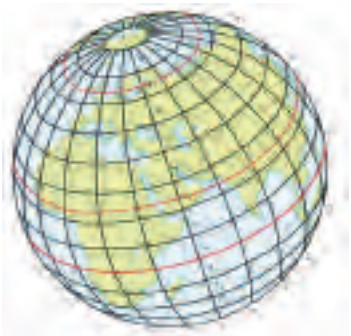
٤ المتتالية في الشكل المجاور متتالية: _____ .

لأَن: _____ .



الحد العام للمتتالية الحسابية:

نشاط ٤: دوائر العرض هي دوائر وهمية متوازية عددها ١٨٠ دائرة منها ٩٠ شمال خط الاستواء و٩٠ جنوبه. ويمثّل خط الاستواء بالدرجة صفر، بين دائرة العرض والأُخرى درجة واحدة أَو ما يعادل ١١١ كم على سطح الأَرض.



تقع إِحدى المدن على بعد ٦١ كم شمال خط الاستواء.

بعد المدينة عن دائرة العرض الأُولى شمال خط الاستواء ٥٠ كم. لماذا؟

بعد المدينة عن دائرة العرض الثانية: _____ .

بعد المدينة عن دائرة العرض الثالثة: ٥٠ + ٢ × ١١١ = ٢٧٢ كم.

بعد المدينة عن دائرة العرض الرابعة: ٥٠ + ٣ × ١١١ = ٢٨٣ كم.

بعد المدينة عن دائرة العرض ن : _____ .

أتعلم: الحد العام للمتتالية الحسابية $ح_ن = أ + (ن - ١) \times د$

حيث أ الحد الأَول ، د : أَساس المتتالية الحسابية، ن : رتبة الحد

نشاط ٥ : لاحظ مراقب أَن الأَخطاء المطبعية لدى موظفة جديدة تقلّ كلما زادت خبرتها بمعدل ١٠ أَخطاء شهرياً حيث كان عدد أَخطائها المطبعية ٥٠٠ خطأ في الشهر الأَول.

المتتالية التي تمثَل عدد الأَخطاء الشهرية : ٥٠٠ ، ٤٩٠ ، ٤٨٠ ، ...

عدد الأَخطاء في الشهر العاشر: ٤١٠

عدد الأَخطاء في الشهر الأَربعين: _____ .

يصبح عدد الأَخطاء الشهرية ٣٢٠ بعد: _____ شهراً.

مثال : متتالية حسابية مجموع الحدين: الثاني والثالث منها ٤٣، وحدها الثامن ٥. أَجدُ الحد الأَول والأَساس.

الحل :

$ح_٢ = أ + (٢ - ١) د = أ + د$

$ح_٣ = أ + (٣ - ١) د = أ + ٢د$

$ح_٢ + ح_٣ = (أ + د) + (أ + ٢د)$

$= ٢أ + ٣د = ٤٣$ ... (١)

$ح_٨ = أ + ٧د = ٥$ ... (٢)

أَضربُ المعادلة (٢) بالعدد -٢ ينتج:

$-٢أ + -١٤د = -١٠$ ... (٣)

$٢أ + ٣د = ٤٣$ ... (١)

بجمع المعادلتين (٣)، (١) ينتج:

$-١١د = ٣٣$ ، ومنها : $د = -٣$ ، $أ = ٢٦$ ، أُوضِّحُ ذلك.

نشاط ٦: يقف طالبان على خطّ مستقيم في ساحة مدرسة كما في الشكل المجاور، حيث يبعد الأَول مسافة ٣ أَمتار عن سارية العلم، ويبعد عنه طالب آخر ٢٠ متراً، أُريد إِدخال ثلاثة طلاب بينهما حيث تكون المسافة بين كلّ طالبين متجاورين متساوية.



المسافة بين الطالب الثالث والسارية ١٣ متراً.

المسافة بين كل طالبين متجاورين: _____ .

المتتالية التي تمثّل بعد الطلبة عن السارية، هي:

٣ ، ٨ ، ١٣ ، _____ ، _____ .

العدد : $٨ = \frac{١٣ + ٣}{٢}$

العدد: ١٣ = _____ . ما العلاقة بين كل ٣ أَعداد متتالية؟

تعريف: تسمّى الأَعداد $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$ أَوساطاً حسابية بين العددين أ ، ب :
إِذا كانت أ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$ ، ب متتالية حسابية.

نشاط ٧: إذا كانت ١٥ ، س ، ص ، ٣٦ متتالية حسابية. أَجِدْ قيمة كل من س ، ص

بما أن المتتالية حسابية فإن:

$ح_{ن} = أ + (ن - ١) \times د$

$٣٦ = ١٥ + (٤ - ١) \times د$

$د = ٧$. لماذا؟

ينتج أن $س = ٢٢$

ص = _____ .

فتصبح المتتالية: ١٥ ، ٢٢ ، ٢٩ ، ٣٦ . أُوضِّح ذلك؟

نشاط ٨: في المتتالية الحسابية الآتية أَجِدُ قيمة س، ثم أَكتبُ المتتالية.

-٥ ، س ، .... ، $-٣س + ٣٦$ ، ٣٥

$س + ٥ = -١ + ٣س$. لماذا ؟

قيمة س = _____ .

المتتالية: -٥ ، ٣ ، ١١ ، ١٩ ، ٢٧ ، ٣٥. أُفَسّر ذلك؟

تمارين ومسائل ٣-٢:

١ أكتب الحدود الخمسة الأُولى من المتتاليات الحسابية التي:

أ حدها الأَول ١٢ وأَساسها ٤ ب حدها الأَول ٨ وأَساسها -٣

٢ أَجِد قيمة س التي تجعل $س + ٨$ ، $٤س + ٦$ ، $٣س$ متتالية حسابية.

٣ أُدخلتْ ٦ أوساط حسابية بين العددين ٣٠ ، ٢ . أَجِدْ هذه الأَوساط.

٤ إذا كان الوسط الحسابي لعددين يساوي ٤٠ وكانت النسبة بين هذين العددين كنسبة ٢ : ٣. أَجِدْ العددين.

٥ أفكر: في سباق جري ٢٠٠٠ متر، سجل مدرب أَوقات فريقه على النحو الآتي:

٤٠٠ متر في دقيقة و٣٢ ثانية، ٨٠٠ متر في ٣ دقائق و٤ ثواني، ١٢٠٠ متر في ٤ دقائق و٣٦ ثانية، وهكذا...، علماً بأن السرعة ثابتة. كم يحتاج الفريق من الوقت لإنهاء السباق؟

٣ - ٣ المتتالية الهندسية Geometric Sequence

نشاط ١: الجري رياضة سهلة وبسيطة، وهي من أَفضل أَنواع الريّاضات لدى الجميع؛ وذلك لكونها رياضة ممتعة، وأَقل مايقال عنها أَنها رياضة في متناول الجميع.

تجري فتاة في إِحدى الطرقات المخصصة للرياضة فتقطع في الدقيقة الأُولى ٢٠٠ متر، وفي الدقيقة الثانية $\frac{١}{٢}$ ما قطعته في الدقيقة الأُولى، وفي الدقيقة الثالثة $\frac{١}{٢}$ ما قطعته في الدقيقة الثانية وهكذا باستمرار.

المتتالية التي تمثّل المسافة التي تقطعها الفتاة في الدقيقة الواحدة:

٢٠٠، ١٠٠، ٥٠، ـــــ ، ـــــ ، ـــــ ، ...

نسبة الحد الثاني إِلى الحد الأَول $\frac{١٠٠}{٢٠٠} = \frac{١}{٢}$

نسبة الحد الثالث إِلى الحد الثاني: ـــــ .

ما النسبة بين كل حدين متتالين؟ ماذا ألاحظ؟

نشاط ٢: في المتتالية: ٧ ، ١٤ ، ٢٨ ، ٥٦ ، ١١٢ ، ...

نسبة الحد الثاني إِلى الحد الأَول: $\frac{١٤}{٧} = ٢$

نسبة الحد الثالث إلى الحد الثاني: ـــــ .

أُقارن النسبة بين كل حدين متتالين؟

تُسمّى مثل هذه المتتاليات بالمتتاليات الهندسية.

تعريف: المتتالية الهندسية: هي المتتالية التي تكون فيها النسبة بين أَي حد والحد الذي يسبقه مباشرة قيمة ثابتة وتسمى القيمة الثابتة أَساس المتتالية ويرمز لها بالرمز (ر) كما يرمز للحد الأَول بالرمز (أ) وتكتب على الصورة: أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{٣} ، ...

نشاط ٣: أُميّز المتتالية الهندسية فيما يأتي، ثم أَجِدْ أَساسها وحدها الأَول.

١) ١ ، ٠,١ ، ٠,٠١ ، ٠,٠٠١ ، ... متتالية هندسية لأَنّ:

النسبة بين أَي حد والحد الذي يسبقه مباشرة = $\frac{٠,١}{١} = \frac{٠,٠١}{٠,١} = \frac{٠,٠٠١}{٠,٠١} = ٠,١$

حدها الأَول = ١ ، وأساسها = ٠,١

٢) المتتالية: ٢٠ ، −٥ ، $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{-٥}{١٦}$ ، ... متتالية هندسية. لماذا؟

حدها الأول = _____ ، وأساسها = _____ .

٣) المتتالية: $ح_ن = ن^٢ + ١$ ، ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

المتتالية: ٢ ، ٥ ، ١٠ ، ١٧ ، ... ليست هندسية. لماذا؟

مثال ١ : أكتبُ الحدود الخمسة الأُولى للمتتالية الهندسية التي حدها الأَول ٢٧ وأَساسها $\frac{-٢}{٣}$

الحل : $ح_١ = ٢٧$ ، $ح_٢ = ٢٧ \times \frac{-٢}{٣} = -١٨$ ، $ح_٣ = -١٨ \times \frac{-٢}{٣} = ١٢$

تصبح المتتالية: ٢٧ ، $٢٧ \times \frac{-٢}{٣}$ ، $-١٨ \times \frac{-٢}{٣}$ ، $١٢ \times \frac{-٢}{٣}$ ، $-٨ \times \frac{-٢}{٣}$

٢٧ ، −١٨ ، ١٢ ، −٨ ، $\frac{١٦}{٣}$

الحد العام للمتتالية الهندسية:

نشاط ٤: تريد مريم أَن تقيم حفلة، فدعت ٤ صديقات وطلبت من كل صديقة أَن تدعو ٣ صديقات أُخريات وهكذا، فإذا استمرت عملية الدعوة على ٥ مراحل.

عدد المدعوات إِلى الحفلة في المرحلة الثانية ٤ × ٣ = ١٢

عدد المدعوات إِلى الحفلة في المرحلة الثالثة ٤ × $(٣)^٢$ = ٣٦

المتتالية التي تمثّل عدد الدعوات في المراحل الخمس: _____ ، _____ ، _____ ، _____ ، _____ .

أتعلم: الحد العام للمتتالية الهندسية $ح_ن = أ \times ر^{ن-١}$

حيث أ الحد الأَول، ر : أَساس المتتالية الحسابية، ن : رتبة الحد

نشاط ٥: في المتتالية الهندسية الآتية: ـــــــ ، ١٥ ، ٤٥ ، ١٣٥ ، ...

$ر = \frac{٤٥}{١٥} = \frac{١٣٥}{٤٥} = ٣$

$ح_{١} =$ ـــــــ .

$ح_{٦} = ٥ \times ٣^{٦-١} = ١٢١٥$

$ح_{٨} =$ ـــــــ .

$ح_{١٠} =$ ـــــــ .

مثال ٢ : أكتب الحد النوني (الحد العام) في المتتاليات الهندسية الآتية:

١) ٢ ، -٦ ، ١٨ ، ...

٢) ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ...

الحل :

١) في المتتالية ٢ ، -٦ ، ١٨ ، ...

$أ = ٢ \ ، \ ر = -٣$

$ح_{ن} = ٢ \times (-٣)^{ن-١}$

٢) في المتتالية ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ...

$أ = ٤٠ \ ، \ ر = \frac{١}{٢}$

$ح_{ن} = ٤٠ \times (\frac{١}{٢})^{ن-١}$

نشاط ٦: سقطت كرة مطاطية عن ارتفاع مترين، وكانت بعد كل صدمة ترتد إلى ارتفاع يساوي ثلاث أرباع الارتفاع الذي سقطت منه.

المتتالية الهندسية التي تمثّل ارتفاع الكرة بعد كل اصطدام: $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٨}$ ، $\frac{٢٧}{٣٢}$ ، ... أُوضِّح ذلك.

ارتفاع الكرة الذي ترتد إليه بعد الصدمة الخامسة = ـــــــــــ متراً.

بعد أي صدمة يكون الارتفاع الذي ترتد إليه الكرة مساوياً $\frac{٨١}{١٢٨}$ متراً ؟

$ح_{ن} = أ \times ر^{ن-١}$

$\frac{٨١}{١٢٨} = (\frac{٣}{٢}) \times (\frac{٣}{٤})^{ن-١}$

$\frac{٢٧}{٦٤} = (\frac{٣}{٤})^{ن-١}$ لماذا ؟ إذن ن = ـــــــــــ .

نشاط ٧: أَرادت إِحدى البلديات تصميم نافورة مياه مكونة من أربعة صحون دائرية كما في الشكل المجاور، حيث يكون قطر الصحن الأَول ١٢٠سم، وقطر الصحن الرابع ١٥سم والنسبة بين قطرى كل صحنين متتاليين ثابتة.



بما أَن النسبة بين قطري كل صحنين متتاليين ثابتة فإن أطوال الأَقطار تشكل متتالية هندسية عدد حدودها ٤.

$ح_{٤} = ١٢٠ \times ر^{٣} = ١٥$

النسبة بين أَقطار كل صحنين متتاليين (ر): _____ .

طول قطر الصحن الثاني: _____ ، طول قطر الصحن الثالث: _____ .

أتعلم: إِذاكان أ ، ب عددين ثابتين معلومين فإِن: $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، .... ، $س_{ن}$ تسمى أوساطاً هندسية عددها ن تقع بين أ ، ب إِذا كان: أ ، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، .... ، $س_{ن}$ ، ب متتالية هندسية.

نشاط ٨: أدخل ٣ أَوساط هندسية بين العددين ٦٤ ، ٤

لإِدخال أَوساط هندسية بين العددين ٦٤ ، ٤ نُكوّن المتتالية الهندسية :

٦٤ ، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، ٤

$ح_{ن} = أ \times ر^{ن-١}$

$٤ = ٦٤ \times ر^{٤}$ ، قيمة $ر = \pm \frac{١}{٢}$ لماذا ؟

نستطيع تكوين متتاليتين هندسيتين الأُولى: ٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ٤ . $(ر = \frac{١}{٢})$.

المتتالية الثانية: _____ ، _____ ، _____ ، _____ ، _____ .

تمارين ومسائل ٣-٣:

١ أَجدْ:

أ الحد السادس من المتتالية الهندسية التي فيها أ = ٢ وأَساسها $(-\frac{١}{٢})$.

ب الحد الأَول من المتتالية الهندسية التي $ح_{٥}$ = ٦٤ وأَساسها = ٢

جـ أَساس المتتالية الهندسية التي $ح_{٤}$ = ٢٥٠ وحدها الأَول = ٢

٢ أدخل ٣ أَوساط هندسية بين العددين −١٥ ، −٢٤٠

٣ إِذا كان الحد الثالث من متتالية هندسية هو ١٢ والحد السادس منها هو ٩٦ أَجدْ الحدود الأَربعة الأُولى من المتتالية.

٤ إِذا كانت: س − ١ ، س ، س + ٣ ، ... متتالية هندسية، أَجِدْ حدودها الخمسة الأُولى.

تمارين عامة:

١ اختر رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما الحد العام للمتتالية ١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ... ؟

أ) ن + ٧ ب) ٨ ن ج) ن^{٣} د) ن^{٢}

٢ إذا كان الحد العام للمتتالية ح$_{ن}$ = ٢ن + ١ ، فما قيمة الحد الخامس؟

أ) −٨ ب) ١١ ج) ٦ د) ٣٦

٣ المتتالية الحسابية : ١ ، −١ ، − ٣ ، − ٥ ، ... ، − ٣٧ ما قيمة حدها الأَول وأَساسها على الترتيب؟

أ) −١ ، −٢ ب) ١ ، ٢ ج) ١ ، −٢ د) ٢ ، ١

٤ إذا كونت الأَعداد : ٥ ، ٢ك ، ... ، ٥ك ، ٣٠ متتالية حسابية، فما قيمة ك؟

أ) ٠,٥ ب) ٥ ج) −٥ د) ١٠

٥ ما عدد حدود المتتالية الحسابية : ٦٣ ، ٦٠ ، ... ، ٣٣ ، ٣٠ ؟

أ) ١٠ ب) ١١ ج) ١٢ د) ١٣

٦ ما نوع المتتالية ٣ ، −٣ ، ٣ ، −٣ ، ... ؟

أ) حسابية ب) هندسية

ج) حسابية وهندسية د) لا حسابية ولا هندسية

٧ متتالية هندسية حدها الأَول ١ ، وأَساسها ٣ ما قيمة حدها السابع؟

أ) ٢١ ب) ٨١ ج) ٢٤٣ د) ٧٢٩

٨ ما ترتيب الحد الذي قيمته ٤٨٦ من حدود المتتالية الهندسية: ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٦ د) ٧

٢ أُمَيّز بين المتتالية الحسابية والهندسية فيما يأتي مع ذكر السبب.

أ) ٦ ، ٦ ، ٦ ، ... ب) س ، ٣ س^{٢} ، ٩ س^{٣} ، ...

جـ) ٣س − ١ ، ٥س + ٢ ، ٧س + ٥ د) $\frac{-١}{٩}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، −١ ، ...

٣ أَجِدْ الحدود الأَربعة الأُولى في كل من المتتاليتين الآتيتين ثُم أُمثّلها بيانياً.

أ) $ح_{ن} = \frac{ن}{ن^{٢} + ٣}$ ب) $ح_{١} = ١$ ، $ح_{٢} = ١$ ، $ح_{ن} = ح_{ن-١} + ح_{ن-٢}$

٤ كم وسطاً هندسياً يُمكن إِدخاله بين العددين ٧ ، ٢٢٤ حتى تتكون متتالية هندسية أَساسها ٢؟ أكتب هذه المتتالية؟

٥ ثلاثة أَعداد تكوِّن متتالية حسابية مجموعها −١٢ وحاصل ضربها ٨٠، أَجِدْ الأَعداد الثلاثة.

٦ متتالية حسابية حدها الأَول = ٣ ، فإِذا كان حدها الثاني والرابع والثامن تكوِّن متتالية هندسية، أَجِدْ هذه المتتالية الحسابية.

٧ متتالية حسابية حدها الخامس يساوي ٢٠ و $(ح_{٢})^{٢} = ح_{١} \times ح_{٤}$ ، أَجِدْ المتتالية.

٨ تبلغ مساحة إِحدى المناطق الزراعية ١٢٠٠٠م^{٢} فإِذا كانت نسبة التوسع فيها سنوياً تبلغ ١٠٪ من المساحة الأَصلية، فكم ستكون مساحتها في السنة الخامسة؟

أقيّم ذاتي أكمل الجدول الآتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	متدني
أميز بين المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية			
أجد أي حد لمتتالية حسابية / هندسية			
أجد مجموع حدود لمتتالية حسابية / هندسية			

فكرة ريادية

الموضوع / العمل التطوعي

قرر البرلمان الطلابي في مدرستي إعداد خطة للعمل التطوعي لمدة ١٠ أسابيع بهدف تطوير البيئة المدرسية حيث يشترك في الأُسبوع الأَول ثُمن الطلبة وفي الأُسبوع الذي يليه ثُمن بقية الطلبة وهكذا. أكتب المهمات التي يمكن أَن يقوم بها أعضاء اللجنة التطوعية، وما الآثار المترتبة على عملهم وما عدد الطلبة المشاركين في كل أُسبوع؟



روابط إلكترونية



- http://www.schoolarabia.net/math/general_math/level4/arithmetic_progressions/index.htm
- http://kf-math.blogspot.com/04/2011/blog-post_15.html

الوحدة

٤

النهايات والاتصال



أتأمل الصورة:

ماذا يحدث لصورة مجسم قبة الصخرة في المرآتين المتوازيتين؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف النهايات والاتصال في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ التعرف إلى مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة.
٢ إيجاد نهاية الاقتران عند نقطة باستخدام الجدول والرسم البياني.
٣ إيجاد نهاية الاقتران عند نقطة باستخدام قوانين النهايات.
٤ إيجاد نهاية اقتران متعدد القاعدة عند نقطة.
٥ البحث في اتصال اقتران عند نقطة.

«من خاف النهايات تاه في الطرقات ... ».

١ - ٤ نهاية الاقتران Limit of a Function



نشاط ١: يُعدّ الهاتف النقال أَحد أجهزة التكنولوجيا المتنقلة الواسعة الانتشار، فلا تكاد ترى إِنسانا إِلا ويحمل أَحد هذه الأَجهزة مما يدلّ على أَهميته في هذا العصر، وكلما زادت مساحة ذاكرة الهاتف أُتيحت الفرص لزيادة مساحة الملفات المرئية والصوتية المخزنة عليها.

لدى ياسمين هاتف نقّال مساحة ذاكرته الخارجية (٨ «غيغابايت» GB).

الجدول الآتي يُبين العلاقة بين المساحة المستخدمة والمساحة الحرة من ذاكرة الجهاز.

المساحة المستخدمة	...	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	← ...	٢	→ ...	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩	...
المساحة الحرة	...	٥,٩	٥,٩٩	٥,٩٩٩	←	٦	→	٦,٠٠١	٦,٠١	٦,١	...

- يقابل ٢,٠١ GB من المساحة المستخدمة ٥,٩٩ GB من المساحة الحرة.
- يقابل ٢,٠٠١ GB من المساحة المستخدمة _____ من المساحة الحرة.
- يقابل ١,٩٩ GB من المساحة المستخدمة ٦,٠١ GB من المساحة الحرة.
- يقابل ١,٩٩٩ GB من المساحة المستخدمة _____ من المساحة الحرة.
- اقتراب المساحة المستخدمة من اليمين من العدد ٢ يقابله اقتراب المساحة الحرة من اليمين من العدد ٦.
- اقتراب المساحة المستخدمة من اليسار من العدد ٢ يقابله اقتراب المساحة الحرة من اليسار من العدد _____ .
- أُقارن بين المساحة الحرة عند اقتراب المساحة المستخدمة من العدد ٢ من اليسار واليمين.

نشاط ٢: ليكن ق(س) = س + ٣ ، س ∈ ح ماذا يحدث للاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٣ (من اليمين ومن اليسار)؟

ق(١ ,٣) = ١ ,٣ + ٣ = ١ ,٦ .

ق(٢ ,٩٩) = ٢ ,٩٩ + ٣ = ٥ ,٩٩ .

أُكملُ الجدول الآتي:

س	...	٣ ,١	٣ ,٠١	٣ ,٠٠١	← ...	٣	→ ...	٢ ,٩٩٩	٢ ,٩٩	٢ ,٩	...
ق(س)	...	٦ ,١			←		→		٥ ,٩٩		...

اقتراب قيم س من اليمين من العدد ٣ يقابله اقتراب قيم ق(س) المقابلة لها من العدد ٦ .

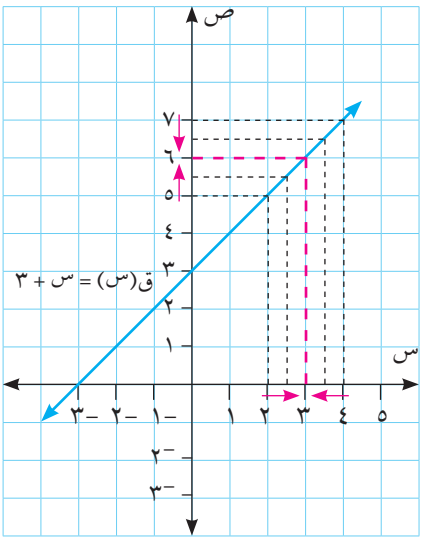
اقتراب قيم س من اليسار من العدد ٣ يقابله اقتراب قيم ق(س) المقابلة لها من العدد _____ .

تعريف: نهاية الاقتران ق(س) عند نقطة:

يكون للاقتران ق(س) نهاية تساوي ل عندما تقترب قيم س من العدد أ ، إذا وفقط إذا كان للاقتران ق(س) نهاية من اليمين تساوي ل ونهاية من اليسار تساوي ل عند س = أ ، وتُكتب بالرّموز: $\text{نهـا}_{س \to أ} ق(س) = ل \leftrightarrow \text{نهـا}_{س \to أ^-} ق(س) = \text{نهـا}_{س \to أ^+} ق(س) = ل$

نشاط ٣: يمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) = س + ٣

من الشكل أَجِدْ النهايات الآتية.



١ $\text{نهـا}_{س \to ٣^-} ق(س) =$ _____ .

٢ $\text{نهـا}_{س \to ٣^+} ق(س) =$ _____ .

٣ $\text{نهـا}_{س \to ٣} ق(س) =$ _____ .

٤ ق(٣) = _____ .

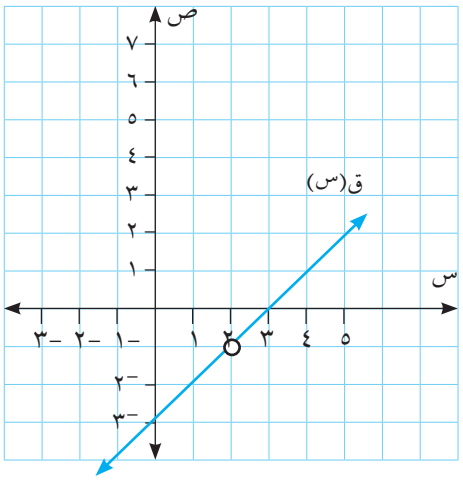
نشاط ٤: إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$ ، س ≠ ٢ ، أَجِدْ $\lim_{\text{س} \to ٢}$ ق(س)، باستخدام الجدول.

ق(س) = $\frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٢)}$ ، س ≠ ٢

ق(س) = س − ٣

س	...	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	← ...	٢	→ ...	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩	...
ق(س)	...	$-٠,٩$	$-٠,٩٩$	$-٠,٩٩٩$	←	....	→	$-١,٠٠١$	$-١,٠١$	$-١,١$	...

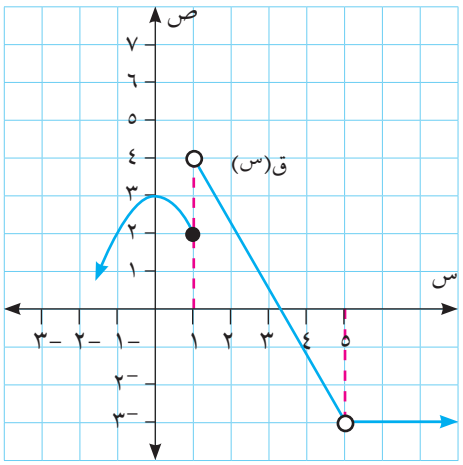
- $\lim_{\text{س} \to ٢^{+}}$ ق(س) = -١ . لماذا؟
- $\lim_{\text{س} \to ٢^{-}}$ ق(س) = _____ .
- $\lim_{\text{س} \to ٢}$ ق(س) = -١ . لماذا؟



أُلاحظ من الشكل المجاور أَن ق(٢) غير معرفة.

من الشكل أُوضِّحُ كيفية إِيجاد $\lim_{\text{س} \to ٢}$ ق(س).

نشاط ٥: أَتأَمَّلُ الشكل المجاور المرسوم ثم أَجِدُ ما يأتي:



- ق(٠) = ٣
- $\lim_{\text{س} \to ٠}$ ق(س) = _____ .
- ق(١) = _____ .
- $\lim_{\text{س} \to ١}$ ق(س) غير موجودة، لماذا ؟
- ق(٥) = _____ .
- $\lim_{\text{س} \to ٥}$ ق(س) = _____ .

تمارين ومسائل ٤-١:

١ باستخدام طريقة الجدول أَجِدْ كل مما يأتي:

أ $\lim_{س \to ٥} (٢س + ٣)$

ب $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٤س + ٣}{س - ٣}$ ، $س \neq ٣$

٢ إذا كان الشكل المجاور يُمثّل منحنى الاقتران ق(س).

من الرسم أجدْ ما يأتي:

أ ق(−٣)

ب $\lim_{س \to -٣} ق(س)$

ج ق(١)

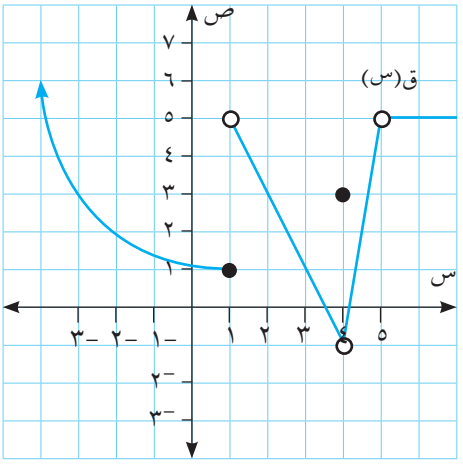
د $\lim_{س \to ١} ق(س)$

هـ ق(٤)

و $\lim_{س \to ٤} ق(س)$

ز ق(٥)

ح $\lim_{س \to ٥} ق(س)$



٤ - ٢ قوانين النهايات Limits Rules



نشاط ١: السباحة إحدى أشهر الرياضات وأكثرها ممارسة من قبل الرياضيين، فهي تعدّ واحدةً من النشاطات الترفيهيّة التي تكسب الجسم فوائد عديدة مهمة.

انطلق سبّاحان في مسابقة ٤٠٠م سباحة ظهر في بركة ماء ارتفاع الماء فيها ثابت مقداره ٦م، عند اقتراب زمن السباق من دقيقتين اقترب الأَول من مسافة ٢٠٠م، واقترب الثاني من مسافة ١٨٠م.

ارتفاع السبّاح الأَول عند اقتراب زمن السباق من ١٠ ثواني = ٦م

ارتفاع السبّاح الأَول عند اقتراب زمن السباق من دقيقتين = ٦م.

ارتفاع السبّاح الأَول عند اقتراب زمن السباق من ٣ دقائق: _____ .

ارتفاع السبّاح الأَول عند اقتراب زمن السباق من ن ثانية: _____ .

مجموع المسافتين التي قطعهما السباحان عند اقتراب زمن السباق من دقيقتين = ٣٨٠م.

الفرق بين المسافتين التي قطعهما السباحان عند اقتراب زمن السباق من دقيقتين= _____ .

أتعلم: **قانون (١): إذا كان أ ، جـ ∋ ح ، وكان ق(س) = جـ ، لكل س ∋ ح**

فإن: $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = جـ

قانون (٢): إذا كان أ ∋ ح ، وكان ق(س) = س^{ن}

فإن: $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ) = أ^{ن}

وبشكل عام إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود فإن: $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

نشاط ٢: ليكن *ق(س) = س، س ∈ ح ، هـ(س) = $\sqrt[٧]{٢}$

١ ق(٠) = ٠

٢ هـ(−٢) = $\sqrt[٧]{٢}$

٣ ق(٥) = _____

٤ هـ(٥) = _____

٥ $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) = −٢

٦ $\lim_{س \to -٢}$ هـ(س) = _____

أتعلم: إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ك، وكان جـ عدداً حقيقياً فإن:

قانون (٣): $\lim_{س \to أ}$ جـ ق(س) = جـ × ل

قانون (٤): $\lim_{س \to أ}$ (ق(س) ± هـ(س)) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) ± $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ل ± ك

مثال ١: إذا كان ق(س) = −٥، $\lim_{س \to -٣}$ هـ(س) = ١٢ . أجدُ قيمة كل من النهايات الآتية:

١ $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

٢ $\lim_{س \to -٣}$ ٥ ق(س)

٣ $\lim_{س \to -٣}$ (ق(س) + هـ(س))

٤ $\lim_{س \to -٣}$ (هـ(س) − ق(س))

الحل:

١ $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = −٥ . لماذا؟

٢ $\lim_{س \to -٣}$ ٥ ق(س) = ٥ $\lim_{س \to -٣}$ ق(س) = ٥ × −٥ = −٢٥

٣ $\lim_{س \to -٣}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\lim_{س \to -٣}$ ق(س) + $\lim_{س \to -٣}$ هـ(س)

= −٥ + ١٢ = ٧

٤ $\lim_{س \to -٣}$ (هـ(س) − ق(س)) = $\lim_{س \to -٣}$ هـ(س) − $\lim_{س \to -٣}$ ق(س)

= ١٢ − (−٥) = ١٧

* يُسمي الاقتران الذي قاعدته = ق(س) = س، س ∈ ح. بالاقتران المحايد.

مثال ٢ : أَجِدُ قيمة كل مما يأتي:

١ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ (٨س − ١١)

٢ $\lim_{س \to -١}$ ٤(٥ + ٧س)

الحل :

١ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ (٨س − ١١) = ٨ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ س − $\lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ ١١

$= ٨ \times \frac{١}{٢} - ١١ = -٧$

٢ $\lim_{س \to -١}$ ٤(٥ + ٧س) = ٤ × $\lim_{س \to -١}$ (٥ + ٧س)

= ٤ × ($\lim_{س \to -١}$ ٥ + ٧ $\lim_{س \to -١}$ س)

$= ٤ \times (٥ + ٧ \times -١) = -٨$

مثال ٣ : إِذا كانت $\lim_{س \to أ}$ ٩(٣س − ٤) = ١٨، أَجِدُ قيمة أ.

الحل :

$\lim_{س \to أ}$ ٩(٣س − ٤) = ٩ $\lim_{س \to أ}$ (٣س − ٤) = ١٨

$= (٣أ - ٤) = \frac{١٨}{٩} = ٢$

٣أ = ٢ + ٤

$أ = \frac{٦}{٣} = ٢$

أتعلم: إِذا كانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ك، فإن:

قانون (٥): $\lim_{س \to أ}$ (ق(س) × هـ(س)) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) × $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ل × ك

قانون (٦): $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} ق(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \frac{ل}{ك}$ ، هـ(س) ≠ ٠ ، ك ≠ ٠

مثال ٤ : أَجِدُ $\lim_{س \to -١}$ (٢س^{٣} − ٥س + ٧)

الحل :

$$\lim_{س \to -١} (٢س^{٣} - ٥س + ٧) = ٢ \lim_{س \to -١} س^{٣} - ٥ \lim_{س \to -١} س + \lim_{س \to -١} ٧$$

$$= ٢ \lim_{س \to -١} (س \times س \times س) - ٥ \lim_{س \to -١} س + \lim_{س \to -١} ٧$$

$$= ٢ (\lim_{س \to -١} س \times \lim_{س \to -١} س \times \lim_{س \to -١} س) - ٥ \lim_{س \to -١} س + \lim_{س \to -١} ٧$$

$$= ٢ \times (-١ \times -١ \times -١) - ٥ \times -١ + ٧$$

$$= ١٠$$

نشاط ٣ : إِذا كان ق(س) = ٧س^{٢} + ٢، هـ(س) = ١٠ − ٢س ، فإِن :

١ $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) = ٧ × (−٢)^{٢} + ٢ = ٣٠

٢ $\lim_{س \to -٢}$ (س^{٢} ق(س) + ٥) = $\lim_{س \to -٢}$ س^{٢} × $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) + $\lim_{س \to -٢}$ ٥

= ٤ × ٣٠ + ٥ = _____

٣ $\lim_{س \to -٢}$ هـ(س) = ١٠ − ٢ × −٢ = ١٤

٤ $\lim_{س \to -٢}$ (٤ ق(س) − ١٠ هـ(س)) = _____

٥ $\lim_{س \to -٢}$ (ق(س) × $\lim_{س \to -٢}$ هـ(س)) = ٣٠ × ١٤ = ٤٢٠

٦ $\lim_{س \to -٢} \frac{س \, ق(س)}{٢ هـ(س)}$ = _____

٧ $\lim_{س \to -٢}$ هـ^{٢}(س) = _____

مثال ٥ : إذا كانت *م(س) = $\frac{س^{٢} + ١٠}{س + ٦}$ ، أجد $\lim_{س \to -٣}$ م(س) ، س ≠ −٦

الحل : $\lim_{س \to -٣}$ م(س) = $\frac{س^{٢} + ١٠}{س + ٦}$

بالتعويض المباشر: $\lim_{س \to -٣}$ $\frac{س^{٢} + ١٠}{س + ٦}$ = $\frac{(-٣)^{٢} + ١٠}{-٣ + ٦}$ = $\frac{٩ + ١٠}{٣}$

= ٦ $\frac{١}{٣}$

مثال ٦ : أجد قيمة $\lim_{س \to ٤}$ $\frac{٢س - ٨}{س + ٥}$ ، س ≠ −٥.

الحل : $\lim_{س \to ٤}$ $\frac{٢س - ٨}{س + ٥}$ = $\frac{٢(٤) - ٨}{٤ + ٥}$ = $\frac{٠}{٩}$ = ٠

أتعلم: إذا كان ناتج التعويض المباشر في الاقتران النسبي مساوياً لـ $\frac{٠}{٠}$ فإن هذه الصورة تُسمى صورة غير معينة، أي لا تعطي نتيجة محددة، وللتخلص من هذه الصورة نُعيد كتابة الاقتران بصورة مكافئة بطرق عديدة إحداها استخدام التحليل إلى العوامل.

مثال ٧ : أجد قيمة $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{٤ - س^{٢}}{٢ - س}$ ، س ≠ ٢.

الحل : عند التعويض المباشر نحصل على : $\frac{٤ - ٤}{٢ - ٢}$ = $\frac{٠}{٠}$ وهي صورة غير معينة، وللتخلص من هذه الصورة نعيد كتابة الاقتران بصورة مكافئة باستخدام التحليل إلى العوامل.

$\lim_{س \to ٢}$ $\frac{٤ - س^{٢}}{٢ - س}$ = $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{(٢ - س)(٢ + س)}{(٢ - س)}$

= ٢ + ٢ = ٤

* الاقتران النسبي هو اقتران يمكن كتابته على الصورة م(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، ق(س) ، هـ(س) كثيرا حدود، هـ(س) ≠ ٠

نشاط ٤: أَجِدُ قيمة $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٣ + ٢٧}{(س + ٣)}$

عند التعويض المباشر نحصل على _____ .

$$\lim_{س \to -٣} \frac{س^٣ + ٢٧}{(س + ٣)} = \lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(س^٢ - ٣س + ٩)}{(س + ٣)}$$

$$\lim_{س \to -٣} (س^٢ - ٣س + ٩) = \text{_____} .$$

تمارين ومسائل ٤-٢:

١ إذا كان $\lim_{س \to ٢} ق(س) = -٢$ ، $\lim_{س \to ٢} ٣هـ(س) = ٩$. أَجِدْ قيمة النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٢} ٢(ق(س) + هـ(س))$

ب) $\lim_{س \to ٢} (ق^٢(س) - هـ(س))$

جـ) $\lim_{س \to ٢} \frac{٥ ق(س)}{هـ^٢(س)}$

د) $\lim_{س \to ٢} (٤ق(س) + س^٢ - ٣)$

٢ أَجِدْ قيمة النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٨} (٢س - ١١)$

ب) $\lim_{س \to ٠} (-٢س^٣ - ٨س + ٧)$

جـ) $\lim_{س \to ٦} \left(\frac{س}{س^٢ - ٣٦} - \frac{٦}{س^٢ - ٣٦} \right)$ ، $س \neq \pm ٦$

د) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ - س - ١٢}{س^٢ - ٩}$ ، $س \neq \pm ٣$

هـ) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ ، $س \neq ١$

و) $\lim_{س \to \sqrt{٧}} \frac{س^٢ - ٢}{س - \sqrt{٧}}$ ، $س \neq \sqrt{٢}$

٣ إذا كان $\lim_{س \to -٢} (أ س^٢ - ٣٦) = ٠$ ، فما قيمة أ ؟

أفكر: أَجِدْ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^٢ - ١}{س^٢ + ٣س}$ ، $س \neq ٠ ، -٣$

٤ - ٣ نهاية اقتران متعدد القاعدة Limit of Multi-Base Function

نشاط ١:



تسعى وزارة المواصلات إلى تنظيم قطاع النقل والمواصلات وصولاً إلى قطاع نقل آمن متطور وبأسعار تناسب الجميع.

قدمت إحدى شركات النقل والسّفر عرضاً خاصاً: أُجرة السفر لمسافة أقل أو تساوي ١٠ كم بسعر ٢,٥ دينار، وأُجرة السّفر لمسافة تزيد عن ١٠ كم بِسعر ربع قراءة عداد السّيّارة، حيث تُعطى قراءة العداد بالدينار.

- أُجرة السّفر لمسافة ٦ كم = ٢,٥ دينار.
- أُجرة السّفر لمسافة ٩ كم : _____ .
- أُجرة السّفر لمسافة ٢٠ كم = $\frac{١}{٤} \times ٢٠ = ٥$ دينار.
- أُجرة السّفر لمسافة ١٢ كم = _____ .
- هل أُجرة السّفر في العرضين تساوي ٢,٥ دينار عندما تقترب مسافة السفر من ١٠ كم. لماذا؟

يمكن كتابة أُجرة السّفر للمسافات المختلفة على صورة اقتران متعدد القاعدة:

$$ق(س) = \begin{cases} ٢,٥ & ، \ س \geq ١٠ \\ \frac{١}{٤} س & ، \ س < ١٠ \end{cases}$$

نشاط ٢:

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س + ٥ & ، \ س \leq ٤ \\ س^{٢} - ١ & ، \ س > ٤ \end{cases}$

- يقع العدد ٢ ضمن مجال القاعدة الثانية.
- فتكون $\lim_{س \to ٢} ق(س) = \lim_{س \to ٢} (س^{٢} - ١) = ٢^{٢} - ١ = ٣$
- $\lim_{س \to ٠} ق(س) =$ _____ .

- يقع العدد ١٠ ضمن مجال القاعدة الأُولى. فتكون $\lim_{س \to ١٠}$ ق(س) = ٣٥
- $\lim_{س \to ٧}$ ق(س) = _____ .
- يقع العدد ٤ على الحد الفاصل بين مجالي القاعدتين.
- $\lim_{س \to ٤^+}$ ق(س) = ١٧
- $\lim_{س \to ٤^-}$ ق(س) = ١٥
- $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) غير موجودة. لماذا؟

أتعلم: إذا كان ق(س) اقتران يُغير قاعدته عند س = أ . نبحث $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) و $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س)

فإذا كانت $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) ، **فإن نهاية الاقتران موجودة عند س = أ .**

نشاط ٣: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{٣} & ، س = ٠ \\ ٣س^٢ - ٢س & ، س \neq ٠ \end{cases}$ ، فإن:

- $\lim_{س \to -١}$ ق(س) = ٥
- $\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = ٠
- $\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = _____ .
- $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = _____ .
- ق(٠) = _____ .
- $\lim_{س \to \sqrt{٣}}$ ق(س) = _____ .

تمارين ومسائل ٤-٣:

١ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س - ١ & ، س \neq ١ \\ ١ & ، س = ١ \end{cases}$ ، أَجِدْ ما يأتي:

أ ق(١)

ب $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

٢ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} -س^{٢} & ، س \leq ٠ \\ س - ٢ & ، س > ٠ \end{cases}$ ، أَجِدْ $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) إن وُجدت.

٣ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٥س + ٤}{س - ٤} & ، س \neq ٤ \\ -١ & ، س = ٤ \end{cases}$ ، أَجِدْ ما يأتي:

أ ق(٤)

ب $\lim_{س \to ٤}$ ق(س)

٤ **أفكر:** إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{٢س - أ}{س - ٤} & ، س \neq -٣ \\ -٨ & ، س = -٣ \end{cases}$ ، وكانت $\lim_{س \to -٣}$ ق(س) = ق(−٣)

أَجِدْ قيمة الثابت أ .

نشاط ١: تقع فلسطين على ثلاثة مسطحات مائية (البحر الأَبيض المتوسط، البحر الأَحمر، البحر الميت) حيث يعتبر بعضاً منها طريقاً للتواصل مع العالم من خلال اتصالها بالبحار والمحيطات العديدة.

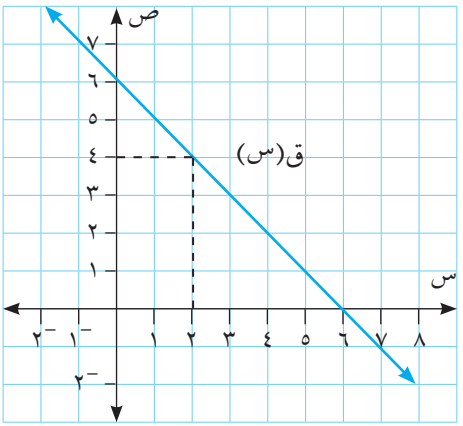


من الطرق البحرية التجارية المهمة لفلسطين البحر الأَحمر لأَنه متصل بالمسطحات المائية الأُخرى.

البحر الأَبيض المتوسط من الطرق البحرية التجارية لفلسطين؟ لماذا؟.

البحر الميت ليس من الطرق التجارية لفلسطين؟ لماذا؟.

نشاط ٢: أَتأَمّلُ الأشكال المرسومة للاقترانات ق(س)، هـ(س)، ل (س)، ك (س).

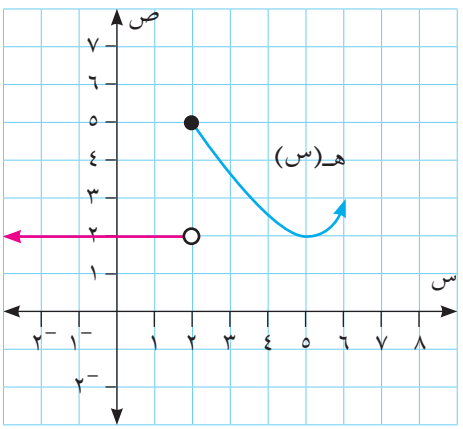


١ في الشكل المجاور:

ق(٢) = ٤

نهـــا ق(س) = ٤
س ← ٢

ق(٢) = نهـــا ق(س) = ٤
س ← ٢



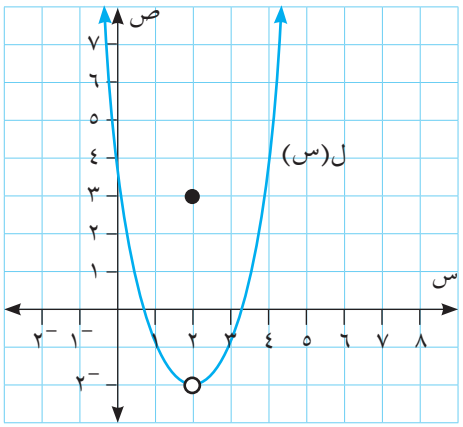
٢ في الشكل المجاور:

هـ(٢) = _____ .

نهـــا هـ(س) = _____ .
س ← ٢

أُقارنُ بين نهـــا هـ(س) وقيمة هـ(٢) .
س ← ٢

٣ في الشكل المجاور:

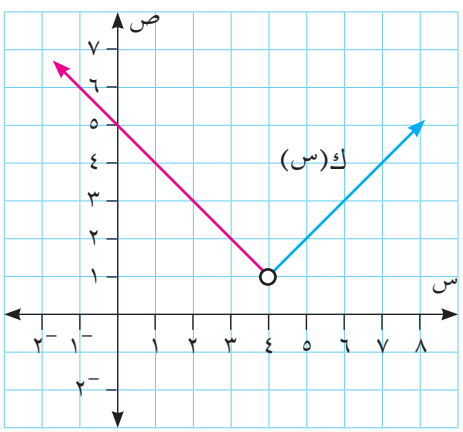


ل(٢) = _____ .

نهـــا ل(س) = _____ .
س ← ٢

أُقارنُ بين نهـــا ل(س) وقيمة ل(٢) .
س ← ٢

٤ في الشكل المجاور:



ك(٤) = _____ .

نهـــا ك(س) = _____ .
س ← ٤

أُقارنُ بين نهـــا ك(س) وقيمة ك(٤) .
س ← ٤

تعريف: يكون الاقتران ق(س) متصلاً عندما س = أ ، إذا تحققت الشروط الآتية:

١ ق(س) معرفة عند س = أ.

٢ نهـــا ق(س) موجودة.
س ← أ

٣ نهـــا ق(س) = ق(أ).
س ← أ

مثال ١ : أَبحثُ في اتصال الاقترانات الآتية عند قيم س المشار إِليها في كل حالة من الحالات الآتية:

١ ق(س) = ١١ ، عند س = ٩

٢ هـ(س) = س^{٣} + ٢س + ١ ، عند س = -١

الحل :

١ ق(٩) = ١١

$\text{نهـــا}_{س \to ٩}$ ق(س) = ١١

ق(٩) = $\text{نهـــا}_{س \to ٩}$ ق(س) = ١١

إِذن ق(س) متصل عند س = ٩

٢ هـ(-١) = $(-١)^{٣} + ٢(-١) + ١ = -٢$

$\text{نهـــا}_{س \to -١}$ هـ(س) = $(-١)^{٣} + ٢(-١) + ١ = -٢$

هـ(-١) = $\text{نهـــا}_{س \to -١}$ هـ(س) = -٢

إِذن هـ(س) متصل عند س = -١

أتعلم: الاقترنات كثيرة الحدود متصلة في مجالها.

نشاط ٣: إِذا كان ق(س) = ٣س ، هـ(س) = س^{٢} .

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = ٧ لأَنه اقتران كثير حدود.

يكون الاقتران هـ(س) متصل عند س = ٧ لأَن _____ .

(ق + هـ)(س) متصل عندس = ٧ لأَن مجموع اقترانين كثيري حدود يساوي اقتران كثير حدود.

(ق – هـ)(س) متصل عند س = ٧ لأَن _____ .

(ق × هـ)(س) متصل عند س = ٧ لأَن _____ .

أُناقش: هل $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$ (س) متصلاً عند س = ٧ . حيث هـ(س) ≠ ٠ .

أتعلم: إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = أ فإن:

١ (ق ± هـ)(س) يكون متصلاً عند س = أ.

٢ (ق × هـ)(س) يكون متصلاً عند س = أ.

٣ $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$(س) يكون متصلاً عند س = أ، حيث هـ (أ) ≠ ٠

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س - ٢ & ، \ س \leq ٠ \\ -٢ & ، \ س > ٠ \end{cases}$ ، أبحثُ في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٠

الحل : ق(٠) = ٢ × ٠ − ٢ = −٢

$\text{نهـــا}_{س \to ٠^+}$ ق(س) = −٢

$\text{نهـــا}_{س \to ٠^-}$ ق(س) = −٢

$\text{نهـــا}_{س \to ٠^+}$ ق(س) = $\text{نهـــا}_{س \to ٠^-}$ ق(س) = −٢

$\text{نهـــا}_{س \to ٠}$ ق(س) = −٢

ق(٠) = $\text{نهـــا}_{س \to ٠}$ ق(س) = −٢

إذن ق(س) متصل عند س = ٠

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س & ، \ س \neq ١ \\ ٤ & ، \ س = ١ \end{cases}$ ، أبحثُ في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١ .

الحل : ق(١) = ٤

$\text{نهـــا}_{س \to ١^+}$ ق(س) = ٣

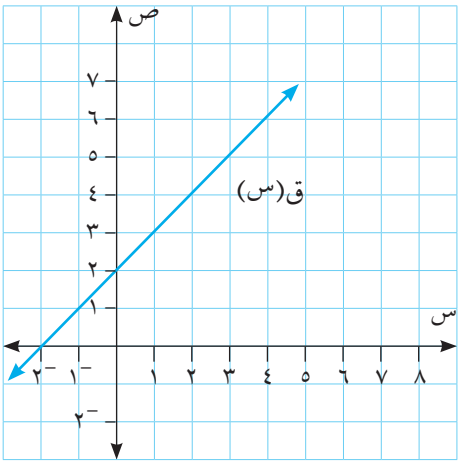
$\text{نهـــا}_{س \to ١^-}$ ق(س) = ٣

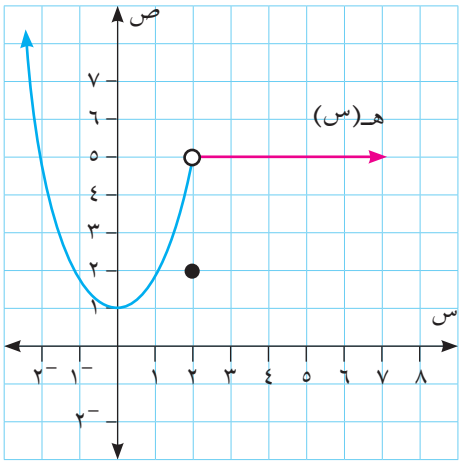
إذن $\text{نهـــا}_{س \to ١}$ ق(س) ≠ ق(١)

إذن ق(س) غير متصل عند س = ١

تمارين ومسائل ٤-٤:

١ أَتأَمّل الاقترانين ق(س)، هـ(س) المرسومين في الشكلين الآتيين ثم أُجب عن الآتي:





أ أَبحثُ في اتصال الاقتران ق(س) عند س = صفر .

ب أَبحثُ في اتصال الاقتران هـ(س) عند س = ٢ .

٢ أَبحثُ في اتصال الاقترانات الآتية عند قيم س المشار إِليها في كل حالة:

أ ق(س) = ٣ س – ٦ عند س = ١

ب ق(س) = (س – ٣) (س + ٣) عند س = ٣

٣ إِذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣ - س & ، \ س > ١ \\ س^{٢} + ١ & ، \ س \leq ١ \end{cases}$ أَبحثُ في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١ .

٤ **أفكر** : إِذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس + ٥ & ، \ س \neq ٢ \\ ١١ & ، \ س = ٢ \end{cases}$ ، أَجد قيمة أ، إِذا كان الاقتران متصلاً عند س = ٢

تمارين عامة:

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما قيمة $\lim_{س \to -٢}$ (٥س^{٣} + ٣س^{٢} – ٦) ؟

أ) ٣٤ ب) –٣٤ جـ) ٤٣ د) –٤٣

٢ إذا كان $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) = ٣ ، $\lim_{س \to ٥}$ ٤هـ(س) = ٨. ما قيمة $\lim_{س \to ٥}$ ٢ق(س) + $\lim_{س \to ٥}$ هـ^{٢}(س)؟

أ) ٧٠ ب) ١١ جـ) ٦ د) ١٠

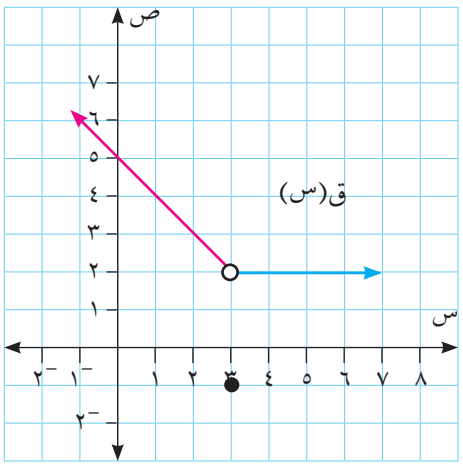
٣ إذا كان ق(س) = أ س^{٢} + س – ٢ وكان $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ١٠ ما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٩ ب) –٩ جـ) –١١ د) ١١

٤ ما قيمة $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س - ٢}{س^{٢} - ٢س - ٣}$ ؟

أ) –١ ب) ١ جـ) صفر د) ٢

٥ في الشكل المجاور ما قيمة $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) ؟



أ) ٢

ب) غير موجودة

جـ) صفر

د) ٣

٦ إذا كان $\lim_{س \to أ}$ (٣ س − ٥) = ١ ما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٣ ب) −٣ جـ) ٢ د) −٢

٧ إذا كان ق(س) = $\frac{٢س^{٢} - ٥}{٦س^{٤} + س + ٣}$. ما قيمة $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)؟

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{-٥}{٣}$ جـ) صفر د) $\frac{-٣}{١٠}$

٨ إذا كان $\lim_{س \to ١}$ ق(س) + ١ = ١١ ، ما قيمة $\lim_{س \to ١}$ (٣س ق(س) − ٣٣) ؟

أ) −٣ ب) ٠ جـ) −٣٠ د) ١٠

٢ إذا كان $\lim_{س \to -١}$ ق(س) = $\lim_{س \to -١}$ هـ(س) ، هـ(س) = س^{٢} + ٣س، أَجِدْ ما يأتي:

أ ٢ $\lim_{س \to -١}$ ق(س) + $\lim_{س \to -١}$ هـ(س)

ب $\lim_{س \to -١}$ $\frac{ق(س)}{هـ^{٢}(س) + ٦س}$

٣ أَجِدْ النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to -٤}$ ٤س^{٢} + ٣س − ٥

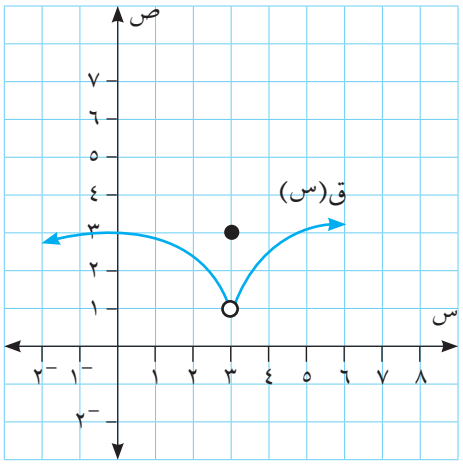
ب $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{٣س^{٢} - ٢س - ٣}{س^{٢} + ٧س + ١٢}$

جـ $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٤}$

د $\lim_{س \to ٢٥}$ $\frac{\sqrt{س} - ٥}{س - ٢٥}$

٤ إذا كان $\lim_{س \to ٢} \frac{٥أ س^{٢} - ٨}{س^{٢} + س + ٢} = ١٠$ ، فما قيمة/ قيم الثابت أ .

٥ أَتأَمّل الشكل المجاور ثم أَجِدُ ما يأتي:



أ $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ق(س)

ب $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ق(س)

جـ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

د ق(٣)

هـ $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)

و ق(٠)

٦ أَبحثُ اتصال الاقتران ق(س) = $\begin{cases} ٧ - س ، & س > ٢ \\ س^{٣} - ٣ ، & س \leq ٢ \end{cases}$ ، عند س = ٢

أقيّم ذاتي

أعبر بلغتي عن المفاهيم الاكثر متعة والمفاهيم التي واجهت بها صعوبات في هذه الوحدة بما لا يزيد عن أربعة أسطر.

فكرة ريادية

الموضوع / الخرائط الجوية

الزيادة في عدد السكان تُقابلها زيادة في عدد المباني السكنية؛ لذلك تلجأ البلديات إلى توسيع المخطط الهيكلي للمدن والقرى. وهنا تبرز الحاجة إلى الخرائط الجوية، وخدمة الـ GBS لتنظيم حركة التنقل. أَكتبُ مشروعاً يوضِّح الآثار السلبية لعدم توفر مثل هذه الخدمات ثم أَرسمُ مخططاً للشوارع في منطقة سكني، موضِّحاً عليها نهاية كل شارع إضافة إلى نقاط التقاطع والاتصال مع الشوارع الأُخرى، وأَقترحُ طريقة لنشرها وتعميمها.



روابط إلكترونية



- https://sites.google.com/site/arabmath12/12/alnhayatwalatsal
- http://www.schoolarabia.net/math/general_math/level5/alnehayat_al2tsal/index.htm

المشروع

شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع.
ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفّذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخّل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.
٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، **(شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).**
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلّاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. **الأهداف** التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.

٢. **الخطة** من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.

٣. **الأنشطة** التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.

٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التى استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

المراجع

الخطيب، روحي إبراهيم(2012): التفاضل والتكامل ج1، دار المسيرة، عمان .

الخطيب، روحي إبراهيم(2012): التفاضل والتكامل ج2، دار المسيرة، عمان .

بسيوني، جابر أحمد(2014): الإحصاء العام، دار الوفاء لدنيا الطباعة، الإسكندرية .

عدنان عوض، أحمد علاونة، مفيد عزام (1990) –دار الفكر – عمان –الأردن

حنيف ، عاصم (1999): حساب التفاضل والتكامل ، دار المعارف القاهرة

خليفة عبد السميع (1994)، تدريس الرياضيات في المدرسة الثانوية: الطبعة الثالثة، كلية التربية، جامعة القاهرة

فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الأول (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشرو التوزيع

فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني(ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع

ابو أسعد ، صلاح عبد اللطيف (2010): أساليب تدريس الرياضيات، الطبعة الاولى. دار الشروق للنشر والتوزيع

الزغلول، عماد (2005): الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.

حسين فرج، عبد اللطيف (2005): طرق التدريس في القرن الواحد والعشرين، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة/ عمان

Bostock&Perkins(1989): Advanced Mathematics, volume1

Bell,E,T (1937): Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Lanl B.Boyer(1989): History of Mathematics Wiley, N.Y

Bostock&Perkins(1989): Advanced Mathematics, volume2

لجنة المناهج الوزارية:

د. صبري صيدم	أ. ثروت زيد	د. شهناز الفار
د. بصري صالح	أ. عزام أبو بكر	د. سمية نخالة
م. فواز مجاهد	أ. عبد الحكيم أبو جاموس	م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد مطر	د. سمية النخالة
د. محمد صالح (منسقًا)	د. علا الخليلي	أ. أحمد سياعرة
د. معين جبر	د. شهناز الفار	أ. قيس شبانة
د. علي عبد المحسن	د. علي نصار	أ. مبارك مبارك
د. تحسين المغربي	د. أيمن الأشقر	أ. عبد الكريم صالح
د. عادل فوارعة	أ. ارواح كرم	أ. نادية جبر
أ. وهيب جبر	أ. حنان أبو سكران	أ. أحلام صلاح
د. عبد الكريم ناجي	أ. كوثر عطية	أ. نشأت قاسم
د. عطا أبوهاني	د. وجيه ضاهر	أ. نسرين دويكات
د. سعيد عساف	أ. فتحي أبو عودة	

المشاركون في ورشات عمل كتاب الرياضيات الحادي عشر الأدبي والشرعي:

نداء حسن	وائل العبيات	أرواح كرم
ابتسام زبيدي	أحلام صلاح	سعيد المطوق
كفاح صالح	إيمان زعتري	رفيق الصيفي
غسان عويضة	مهند سلمان	ابتسام اسليم
أحمد أبو عامود	إيناس زهران	وسام موسى
أمجد حماد	رهام حسين	أمجد الشامطي
أمين الهروش	محمد الفرا	