١٢

بسم الله الرحمن الرحيم



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الأدبي والشرعي

فريق التأليف:

أ. إيناس زهران (منسقاً)　　أ.رهام مصلح　　أ. محمد الفرا



أ. قيس شبانة　　أ. نسرين دويكات

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٨/ ٢٠١٩ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائرة الفنية

إشراف فني	أ. كمال فحماوي
تصميم فني	صباح الفتياني، منال رمضان
تحكيم علمي	د.عمر غنام
تحرير لغوي	د. سهير قاسم
قراءة:	رابعة حنايشة
متابعة للمحافظات الجنوبية	د. سمية النخالة

الطبعة الأولى
٢٠١٩ م / ١٤٤٠ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
فاكس +970-2-2983250 | هاتف +970-2-2983280

تـقـديـم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٨م

مـقـدمـة

يسرنا أن نقدم لزملائنا المعلمين والمعلمات، ولطلبتنا الأعزاء كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي الأدبي والشرعي، وَفْق الخطوط العريضة لوثيقة الرياضيات، والتي تم تطويرها بناءً على التغذية الراجعة والدراسات الهادفة إلى تطوير المناهج الفلسطينية، ومواكبتها لمهارات القرن الحادي والعشرين، مستندين في ذلك لمعايير وطنية ودولية.

لقد اشتمل محتوى الكتاب، على أنشطةٍ وتطبيقاتٍ وسياقاتٍ حياتيةٍ، من أجل إفساح المجال للطلبة للتفكير والإبداع، ولإبراز أهمية الرياضيات في الحياة، وقد تم مراعاة التسلسل المنطقي للمفاهيم والنظريات والتعميمات .

وقد اشتمل الكتاب على اربعة وحدات، هي:

الوحدة الأولى (التفاضل والتكامل) حيث عرضت المفاهيم الآتية: متوسط التغير وقواعد الاشتقاق والقيمة القصوى للإقترانات كثيرة الحدود، ثم ربط التكامل بالتفاضل، والتكامل المحدود وبعض قوانينه.

أما في الوحدة الثانية (المصفوفات) فتم تعريف المصفوفة والعمليات عليها، المحددات والنظير الضربي وحل أنظمة من المعادلات باستخدام المصفوفات.

وفي الوحدة الثالثة (المعادلات والمتسلسلات) استعرضت الوحدة طرق حل المعادلات وكذلك حل بعض المعادلات الأسية واللوغارتمية، والتعرف على أنواع المتسلسلات ومجموعها.

أما الوحدة الرابعة (الاحصاء) فتم عرض العلامة المعيارية، واستخدام الجداول في معرفة المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري وتطبيقات حياتية عليها.

نتمنى أن نكون بهذا العمل قد حققنا مطالب عناصر العملية التعليمية كافة، بإخراج منهاجٍ فلسطينيٍ واقعيٍ ، يربط الطالب بظواهر رياضيةٍ حياتيةٍ، آملين من زملائنا المعلمين والمعلمات والمديرين والمديرات في مدارس الوطن، تقديم التغذية الراجعة لمركز المناهج قبل تطبيق الكتاب المقرر، وأثناء تطبيقه في الميدان، وبعد التطبيق.

والله ولي التوفيق

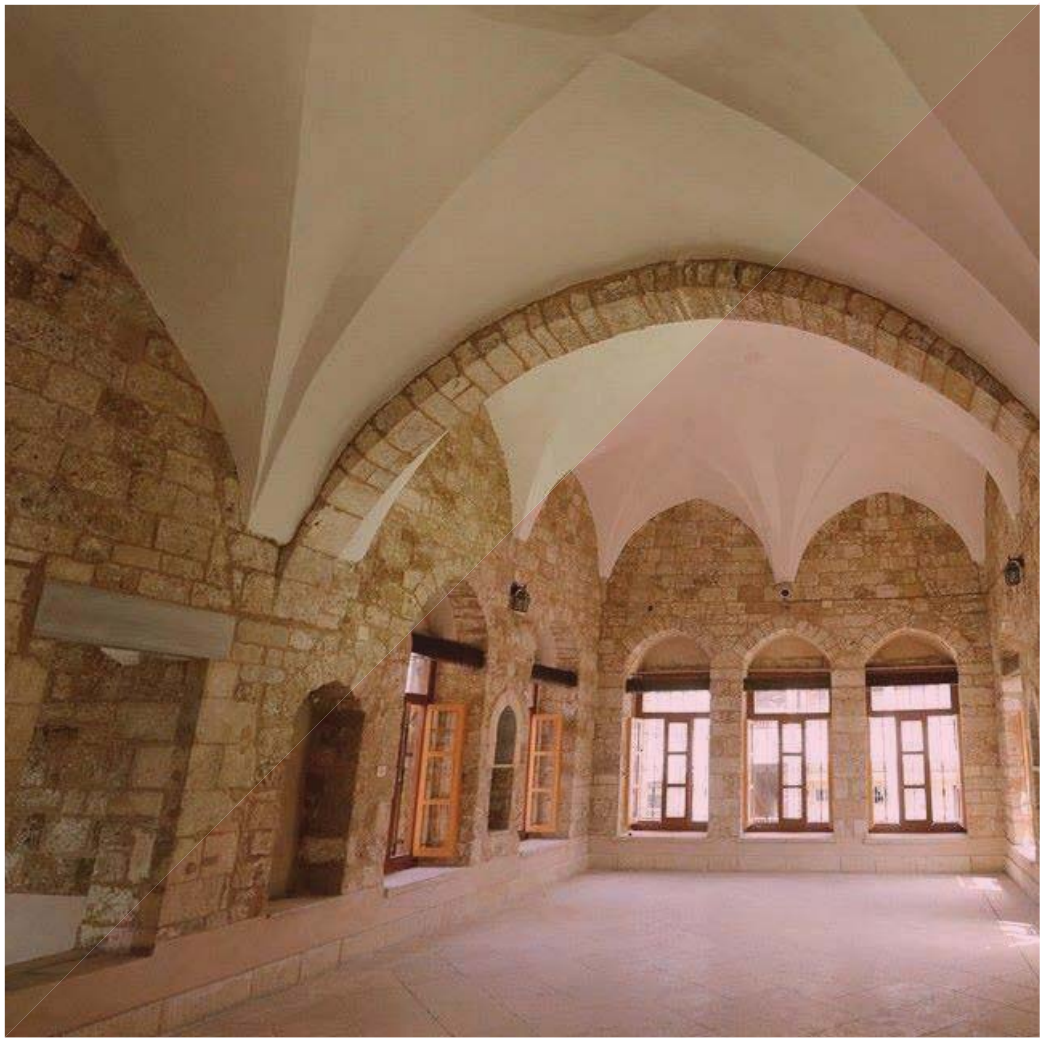
فريق التأليف

المحتويات

التفاضل والتكامل	(١ - ١) متوسط التغير	Rate Of Change	٤
	(١ - ٢) المشتقة الأولى	First Derivative	١٠
	(١ - ٣) قواعدالاشتقاق	Derivative Rules	١٤
	(١ - ٤) القيم القصوى للإقتران	Extreme Values	٢٠
	(١ - ٥) التكامل غير المحدود	Indefinite Integral	٢٥
	(١ - ٦) التكامل المحدود	Definite Integral	٣١
	(١ - ٧) تمـــاريـــن عـــامـــة	Chapter Exercises	٣٨
المصفوفات	(٢ - ١) المصفـوفـة	Matrix	٤٣
	(٢ - ٢) العمليات على المصفوفات	Matrix Operations	٤٩
	(٢ - ٣) ضرب المصفوفات	Matrix Multiplication	٥٨
	(٢ - ٤) النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية	Matrix Inverse	٦٣
	(٢ - ٥) حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كريمر	Cramer`s Rule	٧١
	(٢ - ٦) تمـــاريـــن عـــامـــة	Chapter Exercises	٧٥
المعادلات والمتسلسلات	(٣ - ١) المعادلات الأُسية	Exponent Equations	٧٩
	(٣ - ٢) المعادلات اللوغاريتمية	Logarithmic Equations	٨٢
	(٣ - ٣) المتسلسلات	Series	٨٥
	(٣ - ٤) المتسلسلة الحسابية	Arithmetic Series	٨٩
	(٣ - ٥) المتسلسلة الهندسية	Geometric Series	٩٥
	(٣ - ٦) تمـــاريـــن عـــامـــة	Chapter Exercises	٩٩
الإحصاء	(٤ - ١) العلامة المعيارية	Standard Score	١٠٣
	(٤ - ٢) التّوزيع الطبيعي المعياري	Standard Normal Distribution	١٠٨
	(٤ - ٣) تمـــاريـــن عـــامـــة	Chapter Exercises	١١٤

الوحـــدة ١

التّفاضل والتّكامل
Differentiation and Integration



أفكر وأناقش:

كيف يمكن حساب مساحة الزجاج اللّازم لصناعة باب للمدخل الرئيسي للمتحف؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف مبادئ التفاضل والتكامل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. إيجاد متوسط التغير للاقتران ق(س).
٢. إيجاد ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) المارّ بنقطتين تقعان على ذلك المنحنى.
٣. التعرف على مفهوم المشتقة الأولى للاقتران ق(س).
٤. استخدام قواعد الاشتقاق في إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق(س).
٥. تحديد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) في مجاله.
٦. تعيين القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) في مجاله وتحديد نوعها.
٧. التعرف على مفهوم التكامل.
٨. إيجاد التكامل غير المحدود.
٩. استخدام خصائص التكامل المحدود في ايجاد التكاملات المختلفة.

متوسط التغير



نشاط (١)

يعدّ الزيت الفلسطيني من أَجود أَنواع الزيوت على مستوى العالم، ويشكّل دعامة اقتصادية للعائلة الفلسطينية.

يرصد الجدول أَدناه إنتاج فلسطين من الزيتون، والزيت المستخرج في عامي ٢٠١٣م و٢٠١٤م، كما وردت من جهاز الإحصاء المركزي.

كمية الزّيتون وكمية الزّيت المستخرج منه في العامين ٢٠١٣م و٢٠١٤م (الكميات بالطن)

	السنة	٢٠١٣م	٢٠١٤م	التغير بين العامين
س	كمية الزّيتون	٦٦٠٠٠	١٠١٠٠٠	٣٥٠٠٠
ص	كمية الزّيت المستخرج	١٨٠٠٠	٢٥٠٠٠	_____

التغير في كمية الزّيتون بين عامي (٢٠١٣ م) و (٢٠١٤ م) يساوي ٣٥٠٠٠ طن.

التغير في كمية الزّيت المستخرج بين عامي **(٢٠١٣ م) و(٢٠١٤م)** يساوي _____.

تعريف

إذا كان ص= ق(س) اقتراناً، وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن:

التغير في قيمة س = $س_٢ - س_١$، ويرمز له بالرمز Δس

التغير في قيمة ص = $ص_٢ - ص_١ = ق(س_٢) - ق(س_١)$ ويرمز له بالرمز Δص

نشاط (٢)

أَجدُ التغير في س عندما تتغير قيمة س من $س_١ = ١$ إلى $س_٢ = ٤$.

$\Delta س = س_٢ - س_١ =$ _____ .

مثـال (١)

إذا كان ص = ق(س) = ٥-٢$س^٢$، وكانت $س_١ = ١$، $\Delta س = ٢$، فما قيمة التغير في قيمة ص؟

الحلّ:

$$\Delta س = س_٢ - س_١$$

$$٢ = س_٢ - ١$$

$$س_٢ = ٣$$

$$\Delta ص = ق(س_٢) - ق(س_١) = ق(٣) - ق(١)$$

$$= (٥-٢(٣)^٢) - (٥-٢(١)^٢) \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$= -١٣ - ٣$$

$$= -١٦$$

أناقش: ما التغير في قيمة ص عندما يكون قيمة التغير في س يساوي ١؟ (في المثال ١)

تعريف

إذا كان ق(س) اقتراناً، وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن:

متوسط التغير للاقتران ق(س) $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$ ، $س_١ \neq س_٢$

مثـال (٢)

أَحسبُ متوسط التغير في الاقتران ق(س) = س^{٢} + ٥، عندما تتغير س في [٣،٥] .

الحلّ:

ق(٣) = (٣)^{٢} + ٥ = ١٤

ق(٥) = (٥)^{٢} + ٥ = ٣٠

متوسط التغير للاقتران = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣}$

$= \frac{٣٠ - ١٤}{٢}$

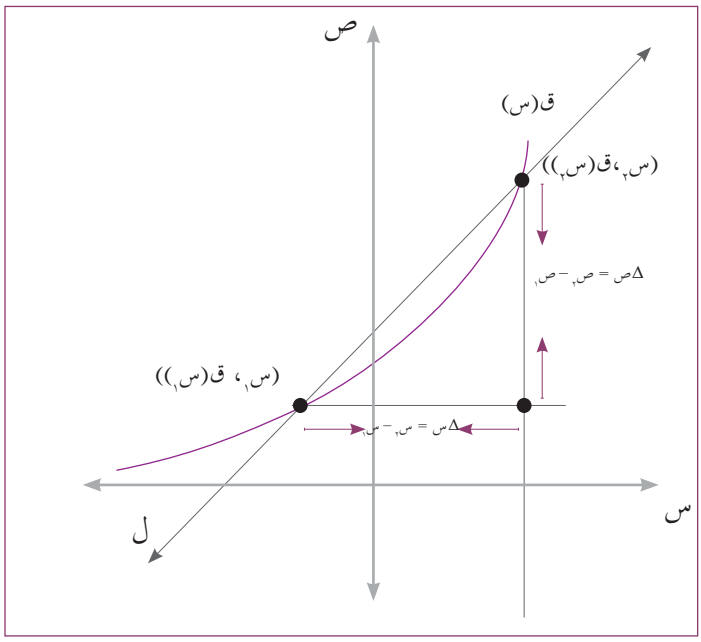
= ٨

المفهوم الهندسيّ لمتوسط التغير:

إذا قطع المستقيم ل منحنى ق(س) في النقطتين (س$_{١}$ ، ق(س$_{١}$))، (س$_{٢}$،ق(س$_{٢}$))

فإن ميل المستقيم القاطع ل يساوي

متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$



مثـال (٣)

أَجدُ ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) الممثل بالشكل المجاور.

الحلّ:

من الرسم:

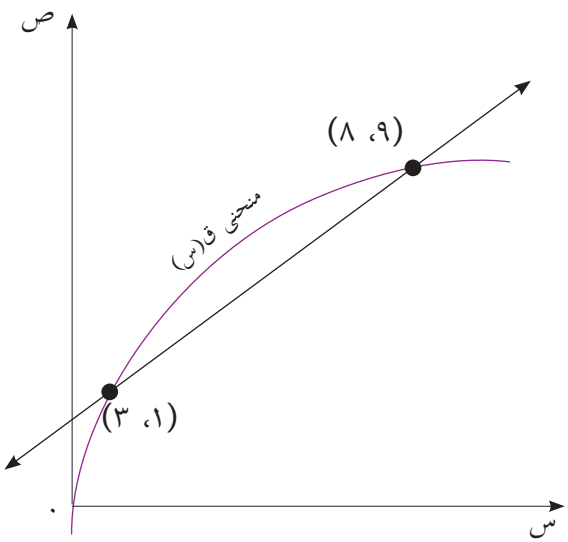
ق(١) = ٣

ق(٩) = ٨

$$\text{ميل القاطع} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق}(٩) - \text{ق}(١)}{٩ - ١}$$

$$= \frac{٨ - ٣}{٩ - ١} = \frac{٥}{٨}$$

إذن ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) يساوي $\frac{٥}{٨}$



مثـال (٤)

إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين أ(-٤، ٦) ، ب(٢، ٠)، فما متوسط التغير للاقتران ق(س)؟

الحلّ:

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$= \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$= \frac{٠ - ٦}{٢ - (-٤)}$$

$$= \frac{٦}{٦-} = -١$$

مثـال (٥)

إذا كان هـ (س)= ٢ق(س) +٤، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [٣، ٧] يساوي ١٠، أجدُ متوسط التغير للاقتران هـ (س) على الفترة ذاتها.

الحلّ:

$$\text{متوسط التغير للاقتران ق(س)} = \frac{\text{ق(٧)} - \text{ق(٣)}}{٧ - ٣}$$

$$= ١٠$$

$$\text{متوسط التغير للاقتران هـ(س)} = \frac{\text{هـ(٧)} - \text{هـ(٣)}}{٧ - ٣}$$

$$= \frac{(٤ + (٣)ق٢) - (٤ + (٧)ق٢)}{٧ - ٣}$$

$$= \frac{(٣)ق٢ - (٧)ق٢}{٧ - ٣}$$

$$= ٢\left(\frac{\text{ق(٧)} - \text{ق(٣)}}{٧ - ٣}\right)$$

$$= ٢ \times ١٠$$

$$= ٢٠$$

تمارين ومسائل (١ - ١)

١ أَجدُ متوسط التغير في كل من الاقترانات الآتية عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{٢}$.

أ) ق(س) = ٦ − ٢س ، س$_{١}$=٠ ، س$_{٢}$= ٣.

ب) هـ(س) = س^{٢} + ٢ س$_{١}$=٢ ، س$_{٢}$= ٥.

جـ) ل(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}+٢}$ س$_{١}$= -١ ، س$_{٢}$= ٦.

٢ يقطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين(١،-٢)، (جـ، ٤)، فإذا كان ميله يساوي ٣، أَجدُ قيمة الثابت جـ.

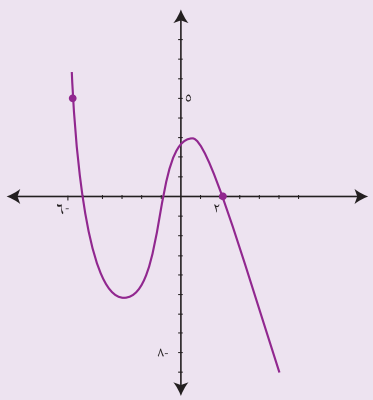
٣ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في [٢، ٤] يساوي ٥، أَجدُ متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) −٢ في تلك الفترة.

٤ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س)= أس^{٢}−٥س في [١ ،٣] يساوي -٩، أجدُ قيمة الثابت أ ؟

٥ إذا كان ق(٣) =٨، وكان متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$= ٣ إلى س$_{٢}$= ٥ يساوي -٢، أَجد ق (٥).

٦ يمثل الشكل المجاور منحنى ق(س) على الفترة [-٦، ٢]

احسب ميل القاطع الذي يمر بنقطتين (-٦،ق(-٦)) و (٢، ق(٢))



المشتقة الأولى

نشاط (١)

تعدّ الضرائب من مصادر التمويل الأساسية لأنشطة الدولة ونفقاتها. وقد تم إقرار ضريبة الدخل على الأفراد من خلال توزيعهم في شرائح ضريبية، حيث تكون ضريبة الدخل ٥٪ على الأفراد الذين ينحصر دخلهم السنوي بين (١-١٥) ألف دينار، في حين لم تقر في فلسطين ضريبة على الهدايا أو الميراث.

مقدار الضريبة على ميراث قدره ١٢٣٠ ديناراً يساوي صفراً (لماذا)؟

مقدار ضريبة الدخل على ١٠٠٠ دينار = $\frac{٥}{١٠٠}$ × ١٠٠٠ = ٥٠ ديناراً.

مقدار ضريبة الدخل على ٢٤٠٠ دينار = $\frac{٥}{١٠٠}$ × ٢٤٠٠ = _____.

مقدار ضريبة الدخل على ١٢٠٠٠دينار =_____.

وبالرموز: إذا كانت(ص) مقدار الضريبة المفروضة على الدخل الذي مقداره (س) حيث ١٠٠٠≤س≤١٥٠٠٠ فإنَّ:

ص= ($\frac{٥}{١٠٠}$) × س، لاحظ أنه مهما اختلف المبلغ تبقى القيمة $\frac{٥}{١٠٠}$ ثابتة. (لماذا)؟

تعريف*

إذا كان ص= ق(س) معرفاً عند س = أ، وكانت $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(أ+هـ) - ق(أ)}{هـ}$ موجودة، فإن ق(س) يكون قابلاً للاشتقاق عند س= أ وتسمى المشتقة الأُولى للاقتران ق(س) عند س= أ .

ويرمز لها بالرمز قَ(أ) أو $\frac{د ص}{د س}_{س=أ}$. أو $ص_{س=أ}$.

قاعدة (١): إذا كانت ص= ق(س)= أ ، حيث أ عدد حقيقي، فإن قَ(س)= $\frac{د ص}{د س}$ = صفر.

قاعدة (٢): إذا كانت ص= أ س+ ب، ، حيث أ ، ب عددان حقيقيان، فإن $\frac{د ص}{د س}$ = أ .

* تعريف المشتقة الأولى للعلم فقط.

مثـال (١)

أَجدُ مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = ٩٨ ب) ص=٥س جـ) ٢ص= -٤س

الحلّ:

أ) ق(س) = ٩٨ (اقتران ثابت)

إذن: قَ (س) = صفر.

ب) ص = ٥س (اقتران خطي)

إذن: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٥$

جـ) ٢ص= - ٤س

ص = -٢س ومنها $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -٢$

قاعدة (٣): إذا كان ق(س) = $س^{ن}$، فـإنّ قَ(س) = ن $س^{ن-١}$ ،حيث:

ن عدد حقيقي، ن≠ ٠، س ≠ ٠

مثـال (٢)

أَجدُ مشتقة الاقتران ق(س) = $س^{٥}$ عند النقطة (-٢، -٣٢).

الحلّ:

قَ(س) = ٥$س^{٥-١}$ = ٥$س^{٤}$

قَ(-٢) = ٥(-٢)^{٤}

= ٥ × ١٦

= ٨٠

نشاط (٢)

إذا كان ق(س) = $\sqrt[3]{س^{2}}$ فلإيجاد قَ(-٨):

ق(س) = $\sqrt[3]{س^{2}}$

ق(س) = $س^{\frac{2}{3}}$ (لماذا)؟

ومنها قَ(س) = $\frac{2}{3} س^{\frac{2}{3}-1}$

= $\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س}}$

ومنها قَ(-٨) = _____.

قاعدة (٤): إذا كان ق(س) اقترانا قابلاً للاشتقاق، وكان ﻫ عدداً حقيقياً، ﻫ ≠ ٠، فإن الاقتران هـ(س) = ﻫ.ق(س) هو اقتران قابل للإشتقاق، وتكون هَ(س) = ﻫ.قَ(س)

مثال (٣)

إذا كان هـ(س) = ٥ق(س)، وكان قَ(٦) = -١، فما قيمة هَ(٦)؟

الحلّ:

هـ(س) = ٥ق(س)

هَ(س) = ٥قَ(س)

هَ(٦) = ٥ × قَ(٦)

ومنها هَ(٦) = ٥ × -١ = -٥

تمارين ومسائل (١ - ٢)

١ أَجدُ مشتقة كل من الاقترانات الآتية عند قيمة س المقابلة لكل منها:

أ) ق(س) = -٢ $\sqrt[٥]{\ }$ عند س = ١٠٠

ب) ص = ٣س عند س = ١٢

جـ) ك(س) = س عند س = -٧

د) ق(س) = $\sqrt[٣]{س^{٥}}$ عند س = ١

هـ) ق(س) = $س^{٣}$ عند س = -١

٢ أجد قَ(س) لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $\frac{٦٤}{٥}$ $س^{-٥}$ ، س ≠ صفر

ب) ق(س) = $(٠,٠٠٣)^{٥}$

جـ) ق(س) = ٥$س^{٤}$

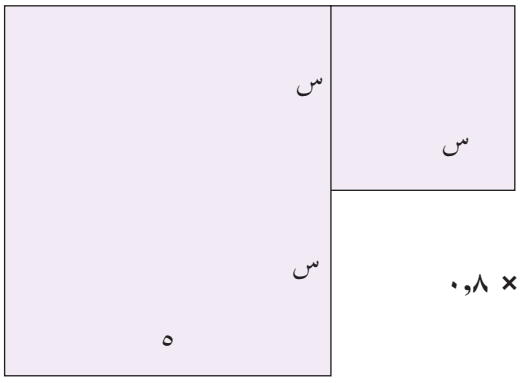
٣ إذا كان ص = ٦ق(س)، وكان قَ(٥) = ٧، أَجدُ قيمة $\frac{ص}{س}$ عند س = ٥

٤ إذا كان ق(س) = ا$س^{٣}$، وكان قَ(٢) = ٦٠، فما قيمة الثابت ا ؟

قواعد الاشتقاق

نشاط (١)

اعتاد الفلسطيني منذ القدم تجميع مياه الأمطار في فصل الشتاء عن أسطح المنازل في بئرٍ يُلحِقهُ ببيته. وتشكل هذه العملية جزءاً من الحصاد المائي الذي يقوم به الفلسطيني للتغلب على مشكلة نقص المياه في فصل الصيف.



يمثل الشكل المجاور سطح أحد المنازل.

مساحة سطح المبنى= (س^{٢})+ (_____)

كمية المياه المتجمعة(م^{٣}) في العام ٢٠١٦م تعطى بالعلاقة:

مساحة سطح المبنى (م^{٢}) × معدل سقوط الامطار العام (م) × ٠,٨

إذا كان معدل سقوط الامطار عام ٢٠١٦ م يساوي ٠,٤٠٤م،

فإن كمية المياه المتجمعة عن سطح البيت = _____.

كيف يمكن اشتقاق هذه العلاقة؟

قاعدة (١): إذا كان ق(س) و هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ك(س) = ق(س) ± هـ(س) فإن:
الاقتران ك(س) يكون قابلاً للاشتقاق، ويكون كَ(س) = قَ(س) ± هَ(س).
وبلغة أخرى: (ق + هـ)َ(س) = قَ(س) + هَ(س)

مثال (١)

إذا كان ق(س) = ٥س^{٢}، وكان هـ(س) = ٤س^{٣}، أجد:

أ) (ق + هـ)َ(س)

ب) (ق − هـ)َ(١)

الحلّ:

قَ(س) = ١٠س. كما أن: هَ(س) = ١٢س^{٢}

أ) بحسب القاعدة: $(ق + هـ)'(س) = ق'(س) + هـ'(س)$

ومنها: $(ق + هـ)'(س) = ١٠س + ١٢س^{٢}$ (لماذا)؟

ب) $ق'(١) = ١٠(١) = ١٠$

$هـ'(١) = ١٢(١)^{٢} = ١٢$

وبما أن $(ق - هـ)'(س) = ق'(س) - هـ'(س)$

فإن: $(ق - هـ)'(١) = ق'(١) - هـ'(١) = (١٠) - (١٢)$

$= -٢$



نشاط (٢)

إذا كان $ق(س) = ٦س^{٢} + ٥س - ٧$، فإن:

$ق'(س) = ٦ \times (٢س) + ٥$ (لماذا؟)

$ق'(٣) =$ _____ .



نشاط (٣)

إذا كان $ق(س) = ك(س) \cdot م(س) + ٧$ حيث: $ك(س) = ٣س^{٣} + ٢$، $م(س) = ٣س + ٢$، فإن:

$ك'(س) = ٩س^{٢}$

$م'(س) = ٣$

$ق'(س) = ك'(س) \cdot م(س) + ٢م'(س)$

= _____ .

ومنها: $ق'(-٢) =$ _____ .

■ **أُفكر:** أَجدُ $ق'(س)$، حيث $ق(س) = (٢س+١) \times (س)$

قاعدة (٢): إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س = أ فإن:

(ق × هـ)َ(أ) = ق(أ) × هـَ(أ) + هـ(أ) × قَ(أ).

وبالكلمات:

مشتقة حاصل ضرب اقترانين= الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

مثال (٢)

اعتمد المعطيات في الجدول المجاور لإيجاد (ق×هـ)/ (-٢)

ق (-٢)	قَ(-٢)	هـ (-٢)	هـَ(-٢)
٥	٤-	١-	٧

الحلّ:

مشتقة حاصل ضرب اقترانين= الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

(ق × هـ)َ(-٢) = ق(-٢) × هـَ(-٢) + هـ(-٢) × قَ(-٢)

= ٥ × ٧ + ١- × ٤-

= ٣٩

نشاط (٤)

إذا كان ق(س) = (٣س^{٢} -٥س) (٧-٤س) فإن قَ(س) تساوي:

قَ(س) = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

قَ(س) = (٣س^{٢} − ٥س) (-٤) + (٧ − ٤س) (٦س − ٥)

ومنها قَ(٢) = _____

= _____

قاعدة (٣): إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان هـ (س) ≠ ٠ عند س = أ فإن:

$$(\frac{ق}{هـ})'(أ) = \frac{(هـ(أ) \times قَ(أ)) - (ق(أ) \times هـَ(أ))}{(هـ(أ))^{٢}}$$ ، وبالكلمات:

$$\text{مشتقة ناتج قسمة اقترانين} = \frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$$

مثـال (٣)

إذا كان ك(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، وكان:

ق(١٠) = ٢، قَ(١٠) = -٣، هـ (١٠) = -٢، هـَ(١٠) = ١٧، أجد ك/(١٠).

الحلّ:

$$كَ(س) = (\frac{ق(س)}{هـ(س)})' = \frac{(هـ(س) \times قَ(س)) - (ق(س) \times هـَ(س))}{(هـ(س))^{٢}}$$

$$كَ(١٠) = \frac{(هـ(١٠) \times قَ(١٠)) - (ق(١٠) \times هـَ(١٠))}{(هـ(١٠))^{٢}}$$

$$= \frac{(-٢ \times -٣) - (١٧ \times ٢)}{٤}$$

$$= \frac{-٢٨}{٤}$$

$$= -٧$$

مثال (٤)

اذا كان ق(س) = $\frac{٣ - ٤س}{٢س - ٦}$ ، س ≠ ٣، أتحقق أن قَ(١) = $\frac{٩}{٨}$

الحلّ:

$$قَ(س) = \frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$$

$$قَ(س) = \frac{(٢س - ٦)(-٤) - (٣ - ٤س)(٢)}{(٢س - ٦)^{٢}}$$

$$قَ(١) = \frac{(-٤)(-٤) - (-١)(٢)}{(-٤)^{٢}}$$

$$= \frac{١٨}{١٦} = \frac{٩}{٨}$$

تمارين ومسائل (١ - ٣)

١ بالاعتماد على البيانات في الجدول المجاور أَحسبُ ما يأتي:

ق(٥)	قَ(٥)	هـ(٥)	هَ(٥)
٩	٢	٣	-١

أ) (ق +٢هـ)َ(٥)

ب) (٣ق −٤هـ)َ(٥)

جـ) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$َ(٥)

د) (ق×هـ)َ(٥)

٢ إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٧، هـ (س) = ٢ − ٣س، أجد:

أ) (ق +هـ)َ(١)

ب) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$َ(س)

جـ) $\frac{قَ(س)}{هَ(س)}$

د) (ق×هـ)َ(٢)

هـ) قَ (٢) × هـ (٢)

و) (س^{٢}× ق(س))َ(-٢)

٣ إذا كان (ق × هـ)َ(٧) = ١٢، ق(٧) = ٣، قَ(٧) = ٦، هَ(٧) = ٣ أجد هـ (٧)

٤ إذا كان (ق ÷ هـ)َ(٩) = ٣، ق(٩) = ٥، قَ(٩) = -١٢، هـ(٩) = -٣

أجد هَ (٩)، علماً بأن هـ(س) ≠ صفر

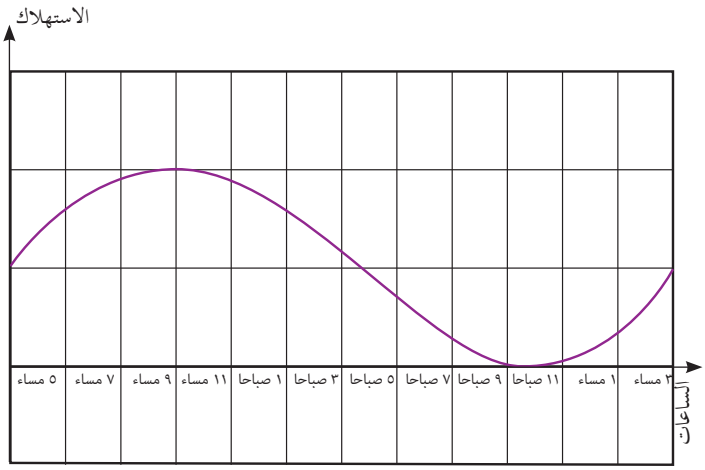
٥ إذا كان ق(س) = ٢س^{٢}+٦س-٥، وكان قَ(٣) = ٠، فما قيمة الثابت ٢؟

٦ إذا كان ق(س) = س^{٢} - ٢أس + ٣، هـ(س) = س^{٢} - ٢، وكان (ق × هـ)َ(١) = ٨، أجد قيمة الثابت أ.

٧ إذا كان ق(س) = $\frac{٢س - ٥}{٦ - ٤س}$ ، وكان قَ(١)= - $\frac{١}{٢}$ ، فما قيمة الثابت ٢؟

القيم القصوى للإقتران

نشاط (١)



تعدّ الكهرباء مطلباً أساسياً في حياة المواطنين. فدونها تتعطل الكثير من الفعاليات. ويتم رصد استهلاك الكهرباء في فلسطين على مدار الساعة. الشكل المجاور يوضّح توزيع الأحمال اليومية من الكهرباء في منطقة القدس وضواحيها في اليوم الأول من عام ٢٠١٨م.

- ألاحظ أن الأحمال تتزايد من الساعة الخامسة مساءً وحتى الساعة التاسعة مساءً، كذلك من الساعة العاشرة صباحا حتى الثالثة مساءاً.

- تتناقص أحمال الكهرباء خلال الفترة _____.

تعريف

يكون الاقتران ق(س) متزايداً على الفترة [أ، ب]،إذا كان: لكل $س_٢ > س_١$ فإنَّ:

$ق(س_٢) > ق(س_١)$ لأي عددين $س_١، س_٢ \in [أ، ب]$.

ويكون ق(س) متناقصاً على الفترة [أ، ب]، إذا كان: لكل $س_٢ > س_١$ فإنَّ $ق(س_٢) < ق(س_١)$

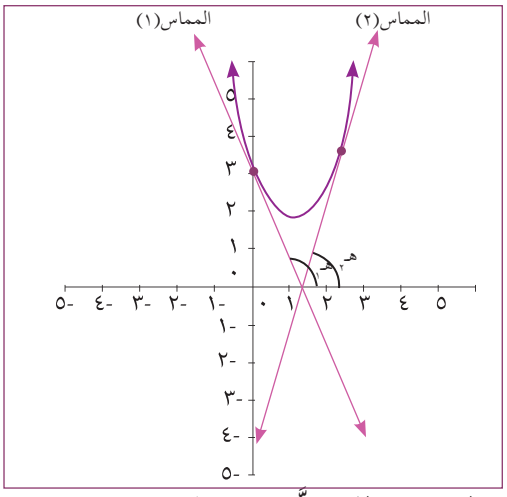
لأي عددين $س_١، س_٢ \in [أ، ب]$.

أتذكّر:

تسمى الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند أي نقطة (س ، ص) زاوية ميل المماس (هـ). فإذا كانت الزاوية (هـ) حادة يكون الميل موجباً. وإذا كانت الزاوية (هـ) منفرجة يكون الميل سالباً.

ملاحظة: ستقتصر الدراسة في هذا السياق على الاقترانات كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة على الأكثر.

نشاط (٢)



يوضِّح الشكل المجاور منحنى الاقتران ك(س) = س^{٢} − ٢س + ٣

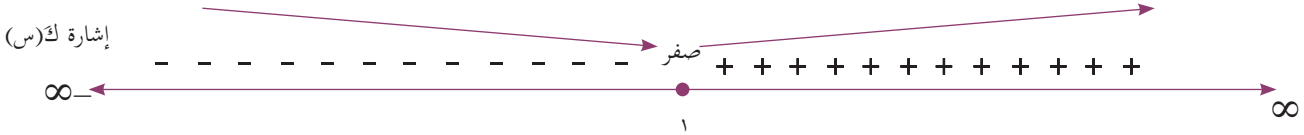
المعرف على ح.

-المماس(١) يصنع زاوية منفرجة(هـ$_{١}$) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، لذا فإنَّ إشارة ميله سالبة في الفترة]-∞، ١[.

- أُلاحظُ أن ك(س) متـناقص في الفترة]-∞، ١[.

- المماس (٢) يصنع زاوية _____ (هـ$_{٢}$) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، لذا فإنَّ إشارة ميله _____ في الفترة [١، ∞[.

أُلاحظُ أن ك(س) متزايد في الفترة [١، ∞[. (لماذا)



قاعدة* : اذا كان ق(س) معرفاًعلى الفترة [أ، ب]، فإن ق(س) يكون:

١) متزايداً في الفترة [أ، ب]، إذاكانت قَ(س)>صفر لكل س في الفترة]أ،ب[.

٢) متناقصاً في الفترة [أ، ب]، إذاكانت قَ(س)<صفر لكل س في الفترة]أ،ب[.

٣) ثابتاً في الفترة [أ، ب]، إذاكانت قَ(س) = صفر لكل س في الفترة]أ،ب[.

مثـال (١)

أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س^{٢} + ٤س − ٧ ، س ∈ ح

الحلّ: نجد قَ(س) فتكون:

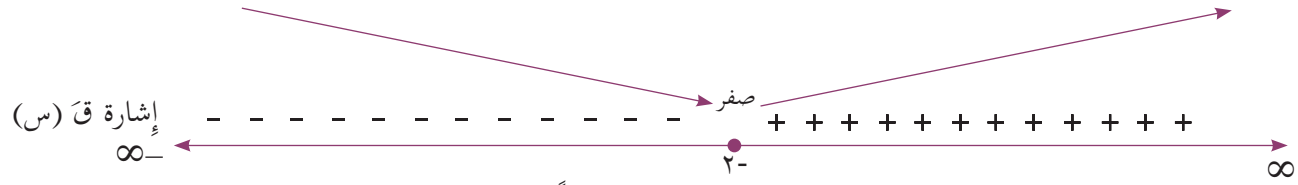
قَ(س) = ٢س+٤

نضع قَ(س)= صفر ومنها: ٢س+٤=٠

إذن س= -٢

* لا يطلب من الطالب التحقق هندسياً من التزايد والتناقص.

أبحث في إشارة قَ (س) في جوار س= -٢



من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور، يكون الاقتران ق(س) متزايداً على الفترة [-٢،∞[،

ويكون متناقصاً في الفترة]-∞، -٢[.

أتعلـــم

يكون للاقتران ق(س) المعرف على ح قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند س= أ، إذا كان:

١. قَ(أ) = صفراً. ٢. يغيّر ق(س) من سلوكه حول س= أ من التزايد إلى التناقص أو العكس.

مثـال (٢)

أُجد القيم القصوى المحلية للاقتران هـ(س)= س^{٣}-٢٧س، س ∈ ح، إن وجدت، وأحدد نوعها.

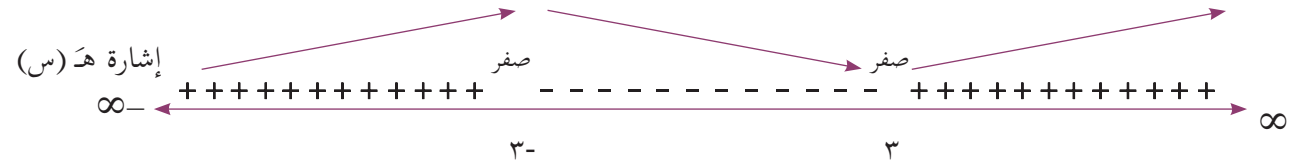
الحلّ:

هـَ (س) = ٣ س^{٢} − ٢٧

هـَ (س) = ٠ (لماذا) ؟

٣ (س^{٢} − ٩) = ٠ ومنها (س − ٣) (س + ٣) = ٠

س= ٣ أو س= -٣ (لماذا) ؟



من إشارة هـَ (س) يتضح أن الاقتران هـ(س) قد غيّر من سلوكه، حول س= -٣ من التزايد إلى التناقص.

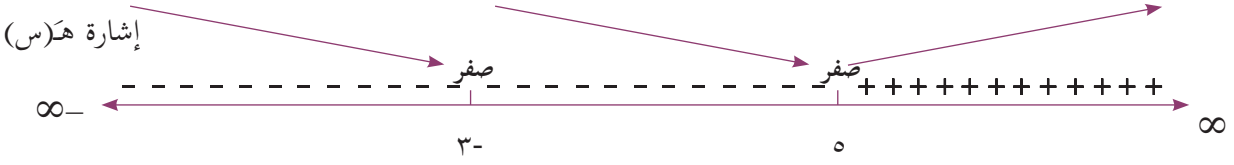
إذن للاقتران هـ(س) قيمة عظمى محلية عند س= -٣، وقيمتها هـ (-٣) =٥٤.

كما أَن هـ(س) غيّر سلوكه من التناقص إلى التزايد حول س = ٣.

إذن للاقتران هـ (س) قيمة صغرى محلية عند س= ٣ وقيمتها هـ (٣) = -٥٤.

نشاط (٣)

الشكل الآتي يمثل إشارة مشتقة الاقتران هـ(س) المعرف على ح.



أ) هـَ(س) = صفر عند س = _____ و عند س = _____.

ب) هـ (س) متناقص في الفترة [-٣ ، ٥].

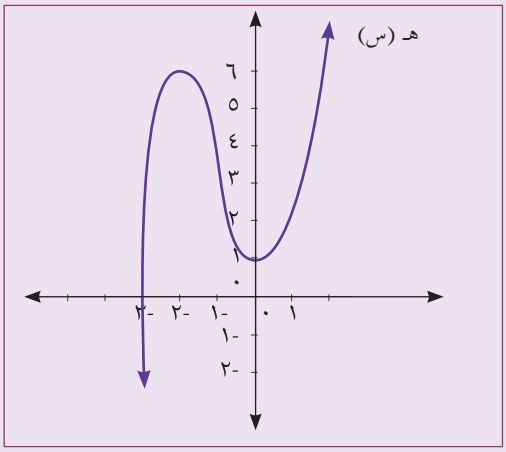
جـ) هـ (س) متزايد في الفترة _____.

د) هـ (-٣) لا تعتبر قيمة صغرى، لأن _____.

هـ) تعتبر هـ(٥) _____.

تمارين ومسائل (١ - ٤)

١ أَجدُ القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران هـ(س) المرسوم في الشكل المجاور.



٢ إذا كان ق(س) = ٣س^{٢}+٦س-١، س ∈ ح، أجد:

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ح.

ب) القيم القصوى للاقتران ق(س)، وأحدد نوع كل منها.

٣ ما قيمة الثابت جـ في الاقتران ق(س) = ٥ − جـ س − س^{٢}، والتي تجعل ق(٢) قيمة عظمى محلية.

٤ ما فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س) = (س + ٢) × (-٢س − ٤).

٥ أحددُ فترات التزايد والتناقص للاقتران ك(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٢س^{٢} − ٥س − ٥، س ∈ ح، وما القيم القصوى (العظمى والصغرى) للاقتران ك(س)؟ وما نوع كل منها؟

٦ أَبين أَنه لا يوجد للاقتران ع(س) = ٢س^{٣} + ٢ قيم قصوى في مجاله.

التكامل غير المحدود

نشاط (١)

تُولد الشعوب حرّةً بطبيعتها، ولأسبابٍ مختلفة تطمع جماعات خارجية بمقدّراتها، فتتحول من حالة الإستقلال إلى حالة الاحتلال. لكنها حالة لا تدوم، فالشعوب تقاوم وتحارب لتستقل من جديد. ويضرب الشعب الفلسطيني أقوى الأمثلة على ذلك.

الاحتلال عكس الاستقلال

كما الهدم عكس _____.

وعملية الطرح عكس _____.

وتعتبر عملية التكامل، في إحدى صورها، عملية عكسية للتفاضل، وهذا يعني أنه يمكن معرفة عائلة الاقترانات ق(س)، إذا عُرِفَت قَ(س) .

نشاط (٢)

إذا كان ق(س) اقتراناً، حيث أن مشتقته ق/(س)=٢س، فإن قاعدة ق(س) **يمكن أن تكون:**

ق١(س) = س٢ .

ق٢(س) = س٢ + ____ .

ق٣(س) = س٢ + $\frac{١}{٣}$

إذن الصورة العامة للاقتران هي ق(س) = _____ .

نشاط (٣)

إذا كان قَ(س) = ٧، فإن قاعدة الاقتران ق(س)، من خلال خبرتك في التفاضل، قد تكون:

ق(س) = ٧س − ٢

أو ق(س) = _____. من هنا جاءت أهمية تعريف عملية التكامل كعملية عكسية للتفاضل.

تعريف

إذا كان ق(س) اقتراناً مشتقته الأُولى قَ(س)، فإن التكامل غير المحدود للاقتران قَ(س) بالنسبة لـ س يساوي ق(س) +جـ، ويرمز لعملية التكامل بالرمز ⌡، وبصورة عامة فإنَّ:

⌡ قَ(س) ds س = ق(س) + جـ، حيث جـ عدد حقيقي.

نشاط (٤)

إذا كان ق/(س) = ٦س.

يكون ق(س) = ⌡ قَ(س) ds س

إذن الصورة العامة لقاعدة الاقتران ق(س) = _____ + جـ، حيث جـ عدد حقيقي.

قواعد التكامل غير المحدود:

قاعدة (١): ⌡ أ ds س = أ س+جـ، حيث أ،جـ عددان حقيقيان.

مثـال (١)

أَجد: أ) ⌡ ٩ ds س ب) ⌡ $\frac{١}{٣}$ ds ص

الحلّ:

أ) ⌡ ٩ ds س = ٩س + جـ

ب) ⌡ $\frac{١}{٣}$ ds ص = $\frac{ص}{٣}$ + جـ

قاعدة (٢): $\int س^{ن} \, ds = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$، حيث ن، جـ عددان حقيقيان، ن $\neq$ -١

مثـال (٢)

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

أ) $\int س^{٣} \, ds$ ب) $\int \sqrt[٣]{س} \, ds$

الحلّ:

أ) $\int س^{٣} \, ds = \frac{س^{٣+١}}{٣+١} + جـ = \frac{١}{٤} س^{٤} + جـ$

ب) $\int \sqrt[٣]{س} \, ds = \int س^{\frac{١}{٣}} \, ds = \frac{س^{١+\frac{١}{٣}}}{١+\frac{١}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

نشاط (٥)

أجد قاعدة الإقتران ق(س) الذي مشتقته قَ(س) = $\sqrt[٤]{س^{٣}}$ ، علماً بأن ق(١) = ١

ق (س) = $\int$ قَ(س) ds

= $\int \sqrt[٤]{س^{٣}} \, ds$

لكن ق(١) = ١ ومنها جـ = _____.

اذن قاعدة الاقتران ق(س) = _____.

قاعدة (٣): إذا كان ق(س) ، هـ(س) إقترانين قابلين للتكامل فإن:

$$\int (ق \pm هـ)(س)\, د س = \int ق(س)\, د س \pm \int هـ(س)\, د س$$

مثـال (٣)

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

أ) $\int (س^{٣} + س)\, د س$ ب) $\int (س^{٤} - \sqrt{س})\, د س$

الحلّ:

أ) $$\int (س^{٣} + س)\, د س = \int س^{٣}\, د س + \int س\, د س$$

$$= \frac{س^{٤}}{٤} + \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$$

ب) $$\int (س^{٤} - \sqrt{س})\, د س = \int س^{٤}\, د س - \int س^{\frac{١}{٢}}\, د س$$

$$= \frac{س^{٥}}{٥} - \frac{٢ س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$$

نشاط (٦)

أ) $$\int (س^{-٣} + س^{-٥})\, د س = \frac{س^{-٢}}{-٢} + \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ = \frac{-١}{٢ س^{٢}} + \frac{-١}{٤ س^{٤}} + جـ$$

ب) $$\int (\frac{١}{س^{٢}} + ٥)\, د س = \text{----------} .$$

نشاط (٧)

١) $\int (س^{٢} + س^{٢} + س^{٢})\, د س = \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

$= س^{٣} + جـ$ (لماذا؟)

٢) $٣\int س^{٢}\, د س =$ _____ .

ألاحظ أن: _____ .

قاعدة (٤): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، وكان ع(س) = ك . ق(س)، حيث ك عدد حقيقي، ك ≠ ٠،

فإن: $\int ع(س)\, د س = ك \int ق(س)\, د س$

مثـال (٤)

أَحسبُ: $\int ٦س^{٢}\, د س$

الحلّ:

$\int ٦س^{٢}\, د س = ٦ \int س^{٢}\, د س$

$= ٦ \times \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

$= ٢س^{٣} + جـ$

تمارين ومسائل (١ - ٥)

١ أَحسبُ كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int (٣س^{٢}+٤س-٥)\,ds$ ب) $\int س^{\frac{٢}{٥}}\,ds$ جـ) $\int \sqrt[٧]{س}\,ds$

د) $\int (٦س^{-٤}+\frac{٢}{٥س^{٢}})\,ds$ هـ) $\int (٥٦س^{٣}+٧س^{٢}+٣س)\,ds$ و) $\int (٥)^{٤٠٠٢}\,ds$

٢ إذا كان ق(س) = $\int (س^{٥}-٤س^{٣}+٨)\,ds$، أجد قَ(١).

٣ إذا كان $\int$ قَ(س) ds= ٣س^{٢} + ٢س+جـ، أَجدُ قَ(س).

٤ إذا كان ص = $\int (س^{٢}+٣)\,ds$، أَجدُ $\frac{ds}{ds}$.

التكامل المحدود

أولاً: التكامل المحدود

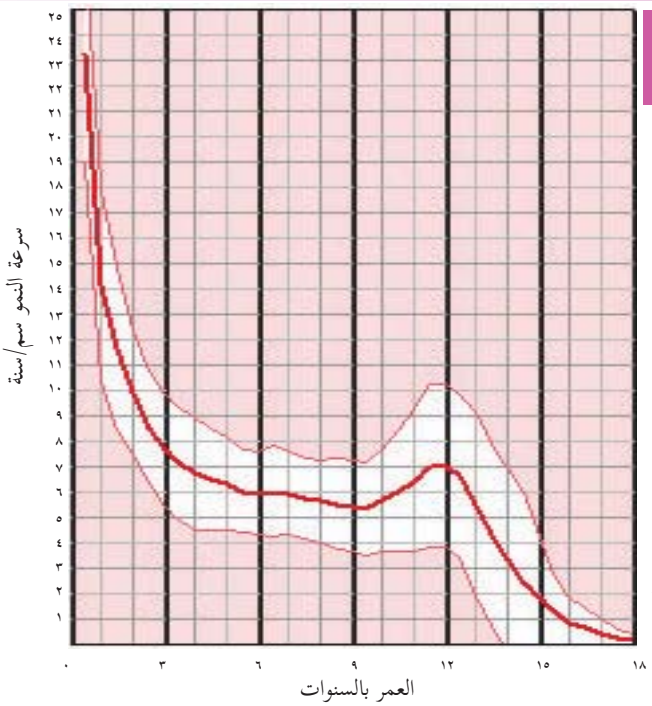
نشاط (١)

عَمِلت وزارة الصحة الفلسطينية على نشر مراكز الرعاية الصحية الأولية في مختلف القرى، والتجمعات السكانية.

من أهداف هذه المراكز متابعة نمو الأطفال.

وذلك من خلال متابعة التغير في طول الطفل.

الشكل المجاور يوضح منحنى سرعة نمو الأطفال من سن صفر إلى ١٨ عاماً.ويمثل هذا المنحنى مشتقة منحنى النمو للأطفال. بالاستعانة بالرسم نجد أن:



سرعة نمو طفل في عمر سنتين يساوي _____سم/سنة.

سرعة نمو طفل في عمر ٩سنوات يساوي _____سم/سنة.

أناقش

كيف يمكن معرفة مقدار التغير في نمو طفل بين سن ٢ - ٩ سنوات؟

نشاط (٢)

يُراد حساب التغير في الاقتران ق(س) الذي تعطى مشتقته بالقاعدة قَ(س)= ٢س-٦، عندما تتغير س من س$_١$=٢ إلى س$_٢$=٥. لإيجاد التغير في الاقتران، نحتاج لقاعدة الاقتران ق(س).

$$ق(س) = \int ق'(س)\,د س$$

$$ق(س) = \int (٢س-٦)\,د س = س^{٢}-٦س+جـ.$$

التغير في ق(س) = ق(س$_٢$) − ق(س$_١$)

ق(٥) = (٥)^{٢} − ٦(٥) + جـ.

ق(٢) = _____ .

إذن: مقدار التغير= ق(٥) − ق(٢)

إذن ق(٥) − ق(٢) = _____

تعريف

التكامل المحدود: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن: $\int_{أ}^{ب} ق'(س)\,د س = ق(س)\Big|_{أ}^{ب} = ق(ب) - ق(أ)$،

حيث أ: الحد الأدنى ، ب: الحد الأعلى ، أ ، ب عددان حقيقيان.

مثال (١)

أَحسبُ قيمة كل من التكاملين الآتيين:

١) $\int_{٠}^{٢} (٢س + ٥)\,د س$

٢) $\int_{-١}^{١} (٦س^{٢} - ٧)\,د س$

الحلّ:

١) $\int_{٠}^{٢} (٢س + ٥)\,د س = (س^{٢}+٥س)\Big|_{٠}^{٢}$

$= (٤+١٠) - (٠) = ١٤$

٢) $\int_{-١}^{١} (٦س^{٢} - ٧).د س = (٢س^{٣}-٧س)\Big|_{-١}^{١}$

$= ((٢)(١)^{٣} - ٧(١)) - ((٢)(-١)^{٣}-٧(-١))$

$= -٥ - ٥$

$= -١٠$

مثـال (٢)

إذا كانت قَ(س) مشتقة الاقتران ق(س)، وكان ق(-١) = ٥، ق(٢) = ٧، أجدُ $\int_{-١}^{٢}$ ٢قَ(س) ds س.

الحلّ:

$$\int_{-١}^{٢} ٢قَ(س)\, ds\, س = ٢ \int_{-١}^{٢} قَ(س)\, ds\, س \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$= ٢ق(س) \Big|_{-١}^{٢}$$

$$= ٢(ق(٢) - ق(-١))$$

$$= ٢(٧ - ٥) = ٤$$

■ **أُفكر:** إذا كان ص= $\int_{٢}^{٣}$ س^{٢} ds س ، أجد $\frac{ds\,ص}{ds\,س}$.

أتعلـم

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفراً دائماً.

مثـال (٣)

إذا كان $\int_{ب}^{٦}$ (٤س + ٣) ds س = ٩٠ فما قيمة الثابت ب؟

الحلّ:

$$\int_{ب}^{٦} (٤س + ٣).ds\, س = (٢س^{٢} + ٣س) \Big|_{ب}^{٦} \qquad \text{(لماذا)؟}$$

= ق(٦) – ق(ب)

= ((٢)(٣٦) +٣ (٦)) – (٢ب^{٢}+٣ب) = ٩٠

=٩٠ – (٢ب^{٢} + ٣ب) = ٩٠

إذن: ب = ٠ أو ب = $\frac{-٣}{٢}$ (لماذا؟)

ملاحظة: تنطبق جميع قواعد التكامل غير المحدود على التكامل المحدود.

ثانياً: خصائص التّكامل المحدود

نشاط (٣)

$\int_{٦}^{٦}$ (٢س + ٨) ds = (س^{٢} + ٨س) $\Big|_{٦}^{٦}$

= _____ .

أستنتج أن : _____

أتعلـــم

$\int_{ب}^{ب}$ ق(س) ds = صفر، حيث: ب عدد حقيقي

مثـال (٤)

ما قيمة $\int_{٣}^{٣}$ (س – ٤)^{٤} ds

الحلّ: $\int_{٣}^{٣}$ (س – ٤)^{٤} ds = صفر، لأَن الحد الأَعلى يساوي الحد الأَدنى.

نشاط (٤)

إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ق(س) د س = (س^{٢} − ٦س + جـ)، أكمل الجدول الآتي:

	التّكامل الأول	قيمة التّكامل الأول	التّكامل الثّاني	قيمة التّكامل الثّاني
الحالة الأولى	$\int_{١}^{٣}$ ق(س) د س	-٤	$\int_{٣}^{١}$ ق(س) د س	
الحالة الثانية	$\int_{-٢}^{٠}$ ق(س) د س		$\int_{٠}^{-٢}$ ق(س) د س	١٦

أُقارن بين قيمة التّكاملين في كل حالة.

أَستنتج أن: _____.

أتعلـــم

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\,د س$$

مثـال (٥)

إذا كان $\int_{١}^{٤}$ ق(س) د س = ٩ فما قيمة $\int_{٤}^{١}$ (٢ق(س) + ٧) د س ؟

الحلّ: $\int_{٤}^{١}$ (٢ق(س) + ٧) د س = ٢ $\int_{٤}^{١}$ ق(س) د س + $\int_{٤}^{١}$ ٧ د س

$$= -٢ \int_{١}^{٤} ق(س)\,د س + ٧س \Big|_{٤}^{١}$$

= (-٢)(٩) + (٧ -٢٨) (لماذا؟)

= -١٨ − ٢١ = -٣٩

نشاط (٥)

إذا كان ق(س) = $\int$ (٤س+١) ك**س** فإن:

أ) $\int_{٠}^{٢}$ (٤س+١) ك**س** = (٢س^{٢}+س) $\Big|_{٠}^{٢}$ = ق(٢) − ق(٠) = ١٠

ب) $\int_{٢}^{٥}$ (٤س+١) ك**س** = (٢س^{٢}+س) $\Big|_{٢}^{٥}$ = ق(٥) − ق(٢) = _____ .

جـ) $\int_{٠}^{٥}$ (٤س+١) ك**س** = (٢س^{٢}+س) $\Big|_{٠}^{٥}$ = ق(٥) − ق(٠) = _____ .

أقارن بين إجابتي في الفرعين أ و ب وإجابتي في الفرع جـ.

أستنتج أن : _____

أتعلـــم

إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [أ، ب]، وكان جـ عدد حقيقي بحيث أ < جـ < ب، فإنَّ:

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ك**س** = $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) ك**س** + $\int_{جـ}^{ب}$ ق(س) ك**س** . وتسمى هذه الخاصية خاصية الإضافة.

مثـال (٦)

إذا كان $\int_{-٣}^{٢}$ ق(س) ك**س** = ٢ ، وكان $\int_{٢}^{٦}$ ق(س) ك**س** = ٤، فما قيمة $\int_{-٣}^{٦}$ ٥ق(س) ك**س**؟

الحلّ: $\int_{-٣}^{٦}$ ق(س) ك**س** = $\int_{-٣}^{٢}$ ق(س) ك**س** + $\int_{٢}^{٦}$ ق(س) ك**س**

= ٢ + ٤ = ٦

اذن: $\int_{-٣}^{٦}$ ٥ق(س) ك**س** = ٥ $\int_{-٣}^{٦}$ ق(س) ك**س** = ٥ × ٦ = ٣٠

تمارين ومسائل (١ - ٦)

١ أحسبُ كل من التكاملات التالية:

أ) $\int_{-٢}^{١} (٣س + ١)\, ds$ ب) $\int_{٢}^{٥} (٧ - ٢س)\, ds$ جـ) $\int_{١}^{٤} (٣ + \sqrt{س})\, ds$

٢ إذا كان $\int_{-٢}^{٢} ع(س)\, ds = ٣س^{٢} - ٢س + جـ$، فما قيمة $\int_{-٢}^{٢} ٢ع(س)\, ds$؟

٣ إذا كان $\int_{١}^{٥} ٣هـ(س)\, ds = ١٢$، ما قيمة $\int_{٥}^{١} (هـ(س) + ٢س - ١)\, ds$؟

٤ إذا كان $\int_{٣}^{٥} (٢س + ب)\, ds = ١٢$، فما قيمة الثابت ب؟

٥ إذا كان $\int_{-١}^{جـ} ٦س\, ds$ = صفر، فما قيمة/قيم الثابت جـ؟

٦ إذا كان $\int_{-١}^{٥} ق(س)\, ds = ١٣$، $\int_{٥}^{-١} هـ(س)\, ds = ٧$، فما قيمة: $\int_{-١}^{٥} (٢ق(س) - هـ(س))\, ds$؟

٧ إذا كان $\int_{٢}^{٧} ق(س)\, ds = ٣$، وكان $\int_{٣}^{٧} ٣ق(س)\, ds = -٩$، فما قيمة $\int_{٢}^{٣} ٤ق(س)\, ds$؟

تمـــــارين عـــامـــة

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١. إذا كان ق(س)= $\frac{٢}{س}$ ، س≠٠، فما قيمة قَ(١)؟

أ) -٨ ب) ٨ جـ) ٢ د) -٢

٢. ما ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س)=٣س^{٢}-٢ عند س$_{١}$= -١، س$_{٢}$=٢؟

أ) ٣ ب) -٦ جـ) ١٢ د) ٩

٣. إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) يساوي $\frac{٣}{٢}$ ، وكان Δس=٦، فما قيمة Δص ؟

أ) ٩ ب) ٣ جـ) ١٨ د) ٦

٤. إذا كان ق(س) = (٥س−١) (٢س) ؛ فما قيمة قَ(١) ؟

أ) ٨ ب) ١٠ جـ) ١٨ د) -٧

٥. إذا كان ق(س) = $\frac{٣س^{٢} + ١}{٢ - س}$ ، س≠٢، فما قيمة قَ(٣)؟

أ) ٣٧ ب) -٣٧ جـ) ١٠ د) ١

٦. إذا كان ق(٧) = -٥، هـ(٧) =٢، قَ(٧) =٣، هـَ(٧)= -١ فما قيمة (٢ق×٣هـ)َ(٧)؟

أ) ٦٦ ب) -٦ جـ) ٦ د) -١٨

٧. إذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة(-١٠، ٥)، فما قيمة قَ(-١٠)؟

أ) ٥ ب) -١٠ جـ) صفر د) ٣

٨. إذا كان ∫ قَ(س) ءس= ٣س^{٢} − ٤س+جـ، فما قيمة قَ(٢)؟

أ) ١٢ ب) ٤ جـ) -٢ د) ٨

٩. إذا كان ق(س)= $\int_{١}^{٩}$ (٥س^{٣} + ٣س − ٢)^{٥} ءس، فما قيمة قَ(٨)؟

أ) ٢٤ ب) ٤٤ جـ) صفر د) ٢

١٠) إذا كان $\int_{٥}^{٧}$ ٢ق(س) ءس=٦، $\int_{٥}^{١}$ ق(س) ءس=٤، فما قيمة $\int_{١}^{٧}$ (٣ق(س)+٢) ءس؟

أ) ٣٢ ب) ٩ جـ) ٣٣ د) ٣

السؤال الثاني: إذا كان ق(س) = س٣ _ جـ س _ ٦ ، وكانت قَ(٢) = صفر ، أجد قيمة الثابت جـ؟

السؤال الثالث: ما متوسط التغير في الاقتران ق(س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، عندما تتغير س من س١ = ١١ إلى س٢ = ١٨؟

السؤال الرابع: إذا كان ق(س) = س^{٣} - ١٢س – ٣؛ أجد قيمة / قيم س بحيث قَ(س) = صفر؟

السؤال الخامس: إذا كان ق(س)= $\int_{ب}^{٥}$ (٢س + ١) ds = ٢٤، أجد قيمة / قيم الثابت ب ؟

السؤال السادس: إذا كان هـ(س) = ٤س^{٢} – ٨س + ١ :

أ) فما فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س)؟

ب) ما القيم القصوى المحلية للاقتران هـ(س)، وما نوعها؟

السؤال السابع: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
احل مسائل على متوسط التغير			
اجد مشتقة الاقترانات موظفا القواعد			
احدد القيم القصوى المحلية للاقترانات			
احل مسائل على التكامل غير المحدود			
اوظف خواص التكامل المحدود في حل مسائل منتمية			

الوحـــدة ٢

المصفوفات
Matrices



يعتبر النخيل من الثّروات الزراعية الرئيسة في كثير من مناطق فلسطين، ويحرص المزارعون على زراعته في صفوفٍ وأَعمدة.... أُناقش أهمية هذا النمط بالزراعة.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المصفوفات والعمليات عليها في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التّعرف إلى المصفوفة وعناصرها.
٢. إيجاد ناتج جمع مصفوفتيْن وطرحهما.
٣. إيجاد ناتج ضرب مصفوفتيْن.
٤. إيجاد النظير الضربيّ للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.
٥. حلّ معادلات مصفوفيّة باستخدام النظير الضربيّ.
٦. حلّ نظام من المعادلات الخطيّة باستخدام قاعدة كريمر.
٧. حل نظام من المعادلات الخطية باستخدام طريقة النظير الضربي للمصفوفة.

المصفـوفـة

نشاط (١)

يقوم جهاز الإحصاء المركزيّ الفلسطينيّ بإجراء التعداد السكانيّ العام مرة واحدة كل ١٠ سنوات؛ بهدف توفير البيانات الحقيقية حول شتى مناحي حياة الفرد الفلسطينيّ، ويقوم الجهاز بتحديث سنوي للبيانات من خلال دراسة عينات من كل المحافظات.

كانت بيانات جهاز الإحصاء المركزيّ حول عدد السكان في بعض المحافظات الفلسطينية حتى نهاية العام ٢٠١٢م (لأقرب ألف) كالآتي: القدس ٣٩٧ ألف، أريحا ٤٨ ألف، غزة ٥٧٠ ألف، أما في عام ٢٠١٤م فتمَّ تحديث هذه البيانات كالآتي: القدس ٤١٢ ألفاً، أريحا٥١ ألفاً وغزة ٦٦٧ ألفاً.

عدد سكان القدس عام ٢٠١٢م يساوي _____ .

عدد سكان أريحا عام ٢٠١٤م يساوي _____.

عدد سكان غزة عام ٢٠١٢م يساوي _____.

أُنظِّم هذه البيانات في صفوف وأعمدة كالآتي:

	عدد السكان عام ٢٠١٢م	عدد السكان عام ٢٠١٤م
القدس	_____	_____
أريحا	_____	_____
غـــــزّة	_____	_____

كيف يمكن ترتيب هذه البيانات في منظومة أُخرى؟

تعريف

المصفوفة: هي تنظيم مستطيل الشكل لأعداد حقيقية على هيئة صفوف عددها (م) وأعمدة عددها(ن)، محصورة بين قوسين من النوع [ ]، ويرمز لها بأحد الحروف الهجائية، وتكون المصفوفة من **الرتبة** م × ن.

نشاط (٢)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٤ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٧ \\ -٤ & ٧ & ٥ \\ ٠ & ٢ & ١٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ٥ \end{bmatrix}$

أ) رتبة المصفوفة أ تساوي ٣×٢ . (لماذا؟)

ب) رتبة المصفوفة ب تساوي_____ .

جـ) رتبة المصفوفة جـ تساوي_____ .

د) يقع العدد٦ في تقاطع الصف الثالث والعمود الثاني في المصفوفة أ، ولذلك يسمى **المدخلة** $أ_{٢٣}$

■ **أُفكر:** أُسمِّ المدخلة التي قيمتها -٨ في المصفوفة أ.

أتعلـــم

يسمّى كل عدد في المصفوفة أ مدخلة، ويرمز له بالرمز $أ_{ي هـ}$ ، حيث:

(ي): الصف الذي تقع فيه المدخلة، (هـ): العمود الذي تقع فيه المدخلة.

مثـال (١)

إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ ٩ & ٣ \\ ٧ & -٨ \end{bmatrix}$ ، فأجيبُ على الأسئلة الآتية:

أ) ما رتبة المصفوفة أ؟

ب) ما قيمة كل من المدخلات الآتية: $أ_{٢١}$ ، $أ_{١٢}$ ، $أ_{٢٣}$ ؟

جـ) أُسمِّ المدخلة التي قيمتها ٣ في المصفوفة أ.

الحلّ:

أ) رتبة المصفوفة أ = ٣ × ٢.

ب) المدخلة $أ_{٢١}$ = ٦، المدخلة $أ_{١٢}$ = ٩، المدخلة $أ_{٢٣}$ = -٨

جـ) المدخلة $أ_{٢٢}$ = ٣. (لماذا)؟

نشاط (٣)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٨ \\ ١ & -٦ & ٩ \end{bmatrix}$ ، فإن:

رتبة المصفوفة أ تساوي _____.

$أ_{٢١}$ = ٣

$أ_{١٢}$ = _____.

$أ_{٢١}$ - $أ_{١٢}$ = _____.

نشاط (٤)

أَكتبُ جميع المصفوفات الممكنة، بحيث يكون عدد مدخلاتها أربعة، وقيمة كل منها صفر.

أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

ب= _____.

جـ = _____.

أتعلـــم

من أنواع المصفوفات:

- **مصفوفة الصف:**

هي المصفوفة التي تتكوَّن من صف واحد فقط، و(ن) من الأعمدة، وتكون رتبتها ١×ن.

- **مصفوفة العمود:**

هي المصفوفة التي تتكوَّن من عمود واحد فقط، و(م) من الصفوف، وتكون رتبتها م×١.

- **المصفوفة المربعة:**

هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة ويساوي (ن)، وتسمى المصفوفة مربعة من الرتبة النونية.

- **المصفوفة الصفرية:** هي المصفوفة التي تكون كل مدخلة فيها تساوي صفراً، ويرمز لها بالرمز**(و)**.

مثـال (٢)

ما رتبة كل من المصفوفات الآتية؟ ومانوعها.

$$س = \begin{bmatrix} ٢ & -٩ & ٠,٥ \end{bmatrix} \quad ، \quad ص = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \\ ٩ \end{bmatrix} \quad ، \quad ع = \begin{bmatrix} ١ & ٩ & ٣ \\ ٥ & ٥ & ٤ \\ ٦ & -١ & ٩ \end{bmatrix} \quad ، \quad و = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} .$$

الحلّ:

١) رتبة س = ١×٣، وهي مصفوفة صف.

٢) رتبة ص= ٣×١، ص مصفوفة عمود.

٣) ع مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة.

٤) رتبة و= ٢×٣، وهي مصفوفة صفرية.

تعريف

تتساوى المصفوفتان أ، ب إذا كان لهما الرتبة نفسها، وكانت جميع مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

مثـال (٣)

أبين فيما إذا كانت المصفوفتان متساويتان في كل من الحالات الآتية:

$$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ١ & ٣ \\ ٨ & ٧ & ١ \end{bmatrix} ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ١ & ٣ \\ ٨ & ٧ & ١ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٩ \end{bmatrix} ، \quad ص = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٩ \end{bmatrix} ؟$$

الحلّ:

١) المصفوفتان أ، ب متساويتان؛ لأن لهما الرتبة نفسها، ومدخلاتهما المتناظرة متساوية.

٢) المصفوفتان س، ص غير متساويتين، لأن رتبة س= ٣×١ أما رتبة ص = ١×٣

مثـال (٤)

إذا كانت أ= $\begin{bmatrix} ٤ & س+٢ \end{bmatrix}$ ، ب= $\begin{bmatrix} ٤ & -٩ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س التي تجعل أ = ب؟

الحلّ:

بما أن $\begin{bmatrix} ٤ & س+٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٩ \end{bmatrix}$

إذن س+٢ = -٩

وبحلّ المعادلة ينتج أن س= -١١.

أناقش

إذا كان: $\begin{bmatrix} س^{٢} & ص+١ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ س+٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أُبيّن أنّ س=٢، ص=٢.

تمارين ومسائل (٢ - ١)

١ ينتج مصنع للأواني الزجاجية ثلاثة أشكال من الصحون: المربع، المستطيل، والدائريّ. فإذا كان لهذا المصنع فرعين أحدهما في الخليل، والآخر في رام الله، وكان عدد الصحون التي ينتجها كل فرع يومياً كما يأتي:

الخليل: ٥٠٠ صحنٍ مربع الشكل، ٤٧٠ صحنٍ مستطيل الشكل، ٢٣٠ صحناً دائري الشكل.

رام الله: ٤٠٠ صحنٍ مربع الشكل، ٢٥٠ صحنٍ مستطيل الشكل، ١٨٠ صحناً دائري الشكل. أكتبُ البيانات السابقة على شكل مصفوفة من الرتبة ٢×٣.

٢ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & -٨ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٤ & \frac{١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$، $جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٨ \end{bmatrix}$:

أ) فما رتبة كل من المصفوفات السابقة؟

ب) ما نوع كل منها؟

جـ) ما قيمة كل من المدخلات الآتية: $جـ_{٢١}$، $أ_{١٢}$، $ب_{٣١}$ ؟

٣ أجدُ قيم الثابتين ب، جـ فيما يأتي:

أ) $\begin{bmatrix} -٤ب & ٥ \\ ٧ & ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ جـ + ١ & ٧ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٥ \\ -٢ \\ جـ + ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٣ب \\ ٧ \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٦ & ١ \\ ٨ & ٥ & ب^{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٦ & جـ^{٢} \\ ٨ & ٥ & ب \end{bmatrix}$

٤ أجدُ قيمة س، ص حيث:

$\begin{bmatrix} س+ص & ٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ س - ٢ص & ٤ \end{bmatrix}$

العمليات على المصفوفات

أولاً: جمع المصفوفات:



نشاط (١)

تمتاز بعض المحافظات الفلسطينية

عن غيرها بالنشاط السياحيّ، ويعتبر عدد العاملين

في الفنادق أحد مؤشرات القوة الاقتصادية لهذا القطاع.

المصفوفتان أ = $\begin{bmatrix} ١٩٠ \\ ١٠٢ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ٣١٠ \\ ٢٥٠ \end{bmatrix}$ تمثلان أعداد

العاملين في الفنادق خلال عام ٢٠١٢م، بحسب بيانات جهاز الإحصاء المركزي.

تمثل المصفوفة أ عدد العاملين في الفنادق شمال فلسطين. فيما تمثل المصفوفة ب عدد العاملين في الفنادق جنوب فلسطين.

الصف الأول في كلا المصفوفتين يمثل عدد الذكور، فيما يمثل الصف الثاني عدد الإناث من العاملين في الفنادق.

عدد العاملين الذكور في جميع فنادق فلسطين عام ٢٠١٢م =١٩٠+٣١٠ = ٥٠٠ عامل.

عدد العاملات في جميع فنادق فلسطين عام ٢٠١٢م =_____.

تمثل المصفوفة جـ أعداد العاملين(ذكوراً وإناثاً) في جميع فنادق فلسطين .

جـ = $\begin{bmatrix} ٥٠٠ \\ ___ \end{bmatrix}$

تعريف

إذا كانت أ، ب مصفوفتين كل منهما من الرتبة نفسها م ×ن فإن مجموع المصفوفتين أ + ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م ×ن، وتكون كل مدخلة في المصفوفة جـ مساوية لمجموع المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين أ، ب ،أي أن: $جـ_{ي هـ} = أ_{ي هـ} + ب_{ي هـ}$

نشاط (٢)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٨ & ٢ \\ ٩ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٥- \\ ٤- & ٩- \end{bmatrix}$ فإنّ:

رتبة $أ = ٢ \times ٣$

رتبة ب = _____.

أناقش

هل يمكن إجراء العملية أ+ب؟ أُفسِّر _____.

مثـال (١)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٨ & ٥ & ٢- \\ ٤ & ١ & ٣ \\ ٨- & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١٠- & ١ & ٩ \\ ٣ & ٣ & ٣ \\ ١٠ & ٣- & ٤ \end{bmatrix}$ ، أجد أ + ب (إن أمكن).

الحلّ:

بما أن رتبة المصفوفة أ = رتبة المصفوفة ب، فإنه يمكن إجراء عملية الجمع كالآتي.

$$أ + ب = \begin{bmatrix} ٨ & ٥ & ٢- \\ ٤ & ١ & ٣ \\ ٨- & ٤ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٠- & ١ & ٩ \\ ٣ & ٣ & ٣ \\ ١٠ & ٣- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠- + ٨ & ١ + ٥ & ٩+ ٢- \\ ٣ + ٤ & ٣ + ١ & ٣ + ٣ \\ ٨- + ١٠ & ٣- + ٤ & ٤ + ٥ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٧ & ٦ & ٧ \\ ٦ & ٤ & ٧ \\ ٩ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

نشاط (٣)

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٢ \\ ٦ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٩ \\ ٦ & ٣ & ١٠- \end{bmatrix}$

أ + ب = _____ .

ب + أ = _____ .

ماذا تلاحظ؟

أتعلـــم

عملية جمع المصفوفات هي عملية تبديلية.

نشاط (٤)

إذا كانت $\text{ع} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٧٠- & ٨ \end{bmatrix}$، $\text{هـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣٠- & ٠ \end{bmatrix}$، $\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٥٠- & ١١ \\ ١٠- & ٣ \end{bmatrix}$

أ) $(\text{ع} + \text{هـ}) + \text{جـ} = \left(\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٧٠- & ٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣٠- & ٠ \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} ٥٠- & ١١ \\ ١٠- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٨ \\ ١١٠- & ١١ \end{bmatrix}$

ب) ع + (هـ + جـ) = _____

أقارن بين النتيجتين.

أتعلـــم

عملية جمع المصفوفات هي عملية تجميعية.

نشاط (٥)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$، $و = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن:

$$أ + و = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$$

و + أ = _____ . ماذا تُلاحظ؟

أتعلم

المصفوفة الصفرية (و) هي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات.

ثانياً: ضرب المصفوفات بعدد ثابت:

نشاط (٦)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \end{bmatrix}$، فإن:

أ) $أ + أ + أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \end{bmatrix} =$ _____

ب) $(٣أ) = \begin{bmatrix} ٣×٦ & ٣×٤ & ٣×٣ \\ ٣×١ & ٣×٣ & ٣×٧ \end{bmatrix} =$ _____

٣) أُقارنُ بين الإجابتين.

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن، وكان جـ عدداً حقيقياً فإن جـ .أ مصفوفة من الرتبة م×ن، حيث تكون كل مدخلة فيها مساوية للمدخلة المناظرة لها في المصفوفة أ مضروبة بالثابت جـ. أي أن: جـ(أ$_{ي\ هـ}$) = (جـ أ$_{ي\ هـ}$)

مثـال (٢)

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٤ & ٧ & ١ \end{bmatrix}$، ص = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٦ \\ ٣ & ٨ & ٤ \end{bmatrix}$ أَجدُ كل مما يأتي:

أ) ٧س　　ب) $\frac{٣}{٥}$ ص

الحلّ:

أ) ٧س = $\begin{bmatrix} ٤٢ & ٣٥ & ٢٨ & ٢١ \\ ٧ & ٢٨ & ٤٩ & ٧ \end{bmatrix}$.

ب) $\frac{٣}{٥}$ ص = $\begin{bmatrix} ٠ & \frac{٣}{٥} & \frac{١٨}{٥} \\ \frac{٩}{٥} & \frac{٢٤}{٥} & \frac{١٢}{٥} \end{bmatrix}$

أناقش

هل يمكن إجراء العملية الآتية : س+ (-ص)؟

ثالثاً: طرح المصفوفات:

تعريف

إذا كانت أ، ب مصفوفتين من الرتبة نفسها م×ن، فإن ناتج طرح المصفوفتين:

أ - ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م×ن. وتكون كل مدخلة في جـ مساويةً لناتج طرح المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين أ، ب،

أي أن: جـ$_{ي هـ}$ = أ$_{ي هـ}$ - ب$_{ي هـ}$

مثـال (٣)

أجد ناتج ما يأتي (إن أمكن) :

١) $\begin{bmatrix} ٤ \\ -٢ \\ ٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ \\ ٦ \\ ٨ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٨ & ٥ \\ -٣ & ٧ & ٨ \end{bmatrix}$.

الحلّ:

١) $\begin{bmatrix} ٤ \\ -٢ \\ ٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ \\ ٦ \\ ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ - ٤ \\ -٢ - ٦ \\ ٩ - ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ -٨ \\ ١ \end{bmatrix}$

٢) لايمكن إجراء عملية الطرح لأَن رتبتي المصفوفتين غير متساويتين.

مثـال (٤)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$، أجد ما يأتي:

١) $أ + ب$ ٢) $ب + أ$

الحلّ:

١) $أ + ب = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٢) $ب + أ = \begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

ماذا تلاحظ؟

أتعلـــم

إذا كانت أ، ب مصفوفتين حيث: أ + ب = ب + أ = و، فإن ب هي النظير الجمعيّ للمصفوفة أ،
وتكون ب = -أ

نشاط (٧)

اعتادت شركة مطاحن القمح الفلسطيني رصد مبيعاتها (بالطن) من الطحين البلدي والطحين الأبيض والنخالة مرة كل ٤ شهور، في خطي الإنتاج التابعين لها.

تمثل المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٥٠ & ٦٠ \\ ٢٠ & ٢٠ \\ ١٠ & ١٠ \end{bmatrix}$، مبيعات الشركة خلال شهري كانون ثاني وشباط من العام ٢٠١٨م من خطي الانتاج معاً.

وتمثل المصفوفة جـ = $\begin{bmatrix} ١١٠ & ١٣٠ \\ ٦٠ & ٥٠ \\ ٣٠ & ٣٠ \end{bmatrix}$، مجمل مبيعات الشركة في الأشهر الأربعة الأولى من العام ٢٠١٨م من خطي الانتاج معاً.

- أُعبّر عن المصفوفة س التي تمثل مبيعات شهري آذار ونيسان معاً بدلالة المصفوفتين أ، جـ _____.

- أجد المصفوفة س التي تمثل مبيعات الشركة خلال شهري آذار ونيسان= _____.

مثـال (٥)

أَحلّ المعادلة المصفوفيّة الآتية: $٣ + س = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

الحلّ:

باستخدام خاصية ضرب المصفوفات بعدد حقيقيّ فإن:

$$س + \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ -٩ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٥ & ٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

وبإضافة النظير الجمعيّ للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٦ & -١٥ \\ -٩ & -٣ \end{bmatrix}$ إلى طرفي المعادلة ينتج:

$$س + \begin{bmatrix} ٦ & -١٥ \\ -٩ & -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ١٥ \\ ٩ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٦ & ١٥ \\ ٩ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$س + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & ١٨ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$$ (لماذا؟)

إذن: $س = \begin{bmatrix} -٥ & ١٨ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

مثـال (٦)

أَحلّ المعادلة المصفوفيّة الآتية: $٣س - \begin{bmatrix} ٩ & ١٢ \\ ١١ & ٠ \end{bmatrix} = س + \begin{bmatrix} -٧ & ٨ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

الحلّ:

$$٣س - س = \begin{bmatrix} ٩ & ١٢ \\ ١١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٧ & ٨ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$ (لماذا؟)

$$٢س = \begin{bmatrix} ٢ & ٢٠ \\ ١٢ & ٢ \end{bmatrix}$$ ،

ومنها $س = \begin{bmatrix} ١ & ١٠ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$

تمارين ومسائل (٢ - ٢)

١ إذا كان عدد طالبات الفروع: الأدبيّ والرياديّ والزراعيّ في مدرسة فاطمة الزهراء للبنات ٣٢، ٢٥، ٢٢ على الترتيب، عدد طلاب المدرسة الهاشميّة للذكور في نفس الفروع ٣٠، ٢٠، ١٦ على الترتيب. أجيبُ عن الأسئلة الآتية:

أ) أُنظّم بيانات كل مدرسة في مصفوفة عمود.

ب) ما مجموع طلبة الفرع الزراعيّ في كلا المدرستين؟

جـ) أَكتبُ المصفوفة التي تمثل الزيادة في عدد الطالبات في جميع الفروع عن عدد الطلاب في كلا المدرستين؟

٢ إذا كانت المصفوفة جـ= ٢أ + ب، وكانت المدخلة أ$_{٢٥}$ = ٩، والمدخلة ب$_{٢٥}$ = -٨، فما قيمة المدخلة جـ$_{٢٥}$؟

٣ إذا كانت س= $\begin{bmatrix} ٨ & ٣ & ٢ & ٦ \\ ٦ & ٥ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$، ص= $\begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٦ & ٨ \end{bmatrix}$، ع= $\begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ ٧ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$

أَجدُ ما يأتي (إن أَمكن):

أ) س + ص **ب)** ٣س - ٤ص **جـ)** ٥ص - س **د)** س - ٢ع **هـ)** ٢ص - ٣و$_{٢\times ٤}$

٤ أَجدُ ناتج ما يأتي ٣ $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ − ٤ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -٣ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

٥ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ ٤ & ١ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٨ & ١ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$، أَجدُ المصفوفة س حيث: ٢س= أ - ٣ب

٦ أَحلّ كلاً من المعادلات المصفوفيّة الآتية:

أ) س + ٣ $\begin{bmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$ ب) ٢(س + $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$) = س − ٢ $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

جـ) -٢س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix}$ − $\begin{bmatrix} ٠ & -٦ \\ ٥ & ٠ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات



نشاط (١)

تعتبر تجارة السيارات من المشاريع الرائجة في فلسطين في السنوات الأخيرة. يعرض أحد المعارض ثلاثة أنواع من السيارات. تمثل المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٧ \\ ٤ & ٦ & ٦ \end{bmatrix}$ أعداد السيارات التي تم باعها المعرض في العامين ٢٠١٥م و ٢٠١٦م.

أما المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \\ ٨ \end{bmatrix}$ فتمثّل أسعار تلك السيارات (لأقرب ألف دينار) في ذلك المعرض من كل نوع.

مجمل مبيعات عام ٢٠١٥م = (٥×٥) + (٦×٦) + (٨×٧) = ١١٧ ألف دينار، (لماذا؟)

مجمل مبيعات العام ٢٠١٦م = _____.

المصفوفة جـ تمثل مجمل المبيعات في العامين ٢٠١٥م، و٢٠١٦م، جـ = $\begin{bmatrix} ___ \\ ___ \end{bmatrix}$

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م× ن، ب مصفوفة من الرتبة ن ×هـ، فإن:

$أ_{م×ن} \cdot ب_{ن×هـ} = جـ_{م×هـ}$، حيث: $جـ_{ي هـ} = أ_{ي ١} \cdot ب_{١ هـ} + أ_{ي ٢} \cdot ب_{٢ هـ} + \ldots\ldots + أ_{ي ن} \cdot ب_{ن هـ}$

مثـال (١)

أَجدُ ناتج ضرب المصفوفتين أ ، ب في كل من الحالات الآتية:

١) $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٣ \\ ٣ & ٤- & ٠ \\ ٥ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣- & ١ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$

٢) $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ & ٦ \end{bmatrix}$

الحلّ: ألاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب

$$أ \cdot ب = \begin{bmatrix} (٣ \times ٥) + (١ \times ١) + (٠ \times ٦) & (٣ \times ٢) + (١- \times ٣) + (٠ \times ٠) \\ (٠ \times ٥) + (٤- \times ١) + (٣ \times ٦) & (٠ \times ٢) + (٤- \times ٣) + (٣- \times ٠) \\ (١ \times ٥) + (٢ \times ١) + (٥ \times ٦) & (١ \times ٢) + (٢- \times ٣) + (٠ \times ٥) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٦ & ٣ \\ ١٤ & ١٢ \\ ٣٧ & ٤- \end{bmatrix}$$

٢) لا يمكن إجراء عملية الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة أ ≠ عدد صفوف المصفوفة ب.

نشاط (٢)

إذا علمت أن أ، ب مصفوفتان حيث: $أ_{٣\times٤}$. $ب_{٤\times٥}$ = جـ، فإن رتبة المصفوفة جـ تساوي _____.

نشاط (٣)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن:

$$أ \cdot ب = \begin{bmatrix} (٤ \times ٢) + (٣ \times ٥) & (٤ \times ١) + (٣ \times ٠) \\ (٢ \times ٢) + (١ \times ٥) & (٢ \times ١) + (١ \times ٠) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٣ & ٤ \\ ٩ & ٢ \end{bmatrix}$$

ب . أ = _____. ماذا تلاحظ؟

أتعلـــم

عملية ضرب المصفوفات ليست تبديليّة.

مثـال (٢)

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$، ب $= \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٥- & ١٠ \end{bmatrix}$ أجد أ . ب؟

الحلّ:

$$\text{أ . ب} = \begin{bmatrix} (١٠ \times ٢) + (٢- \times ١٠) & (٥- \times ٢) + (١ \times ١٠) \\ (١٠ \times ١) + (٢- \times ٥) & (٥- \times ١) + (١ \times ٥) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

مثـال (٣)

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٧ & ١٠- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix}$، ب $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ أجد ناتج كل من ١) أ . ب ٢) ب . أ؟

الحلّ:

$$\text{أ . ب} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٠- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٠- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix}$$

$$\text{ب . أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ & ١٠- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٠- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix}$$ ماذا تلاحظ؟

أتعلـــم

المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية، ويرمز لها بالرمز $م_٢$، ويطلق عليها أيضاً اسم **مصفوفة الوحدة**.

نشاط (٤)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & -١ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$، $جـ = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن:

$$أ \cdot (ب + جـ) = \begin{bmatrix} ٥ & -١ \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ٢٩ & ١١ \end{bmatrix}$$

$أب + أجـ =$ _____

ماذا ألاحظ؟

أتعلـــم

تتوزع عملية ضرب المصفوفات على عملية الجمع، بحيث تكون عمليتا الجمع والضرب معرفتان.

■ **أُفكر:** إذا كانت: $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$، $جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ -٣ & -٥ \end{bmatrix}$ أبيِّن أَن:

$$(أ \cdot ب) \cdot جـ = أ \cdot (ب \cdot جـ)$$

تمارين ومسائل (٢ - ٣)

١ أجد ناتج ضرب المصفوفات فيما يأتي (إن أمكن):

أ) $\begin{bmatrix} ٧ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ ٥- & ٤ & ٢- \\ ١ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ١ \\ ٥ & ٤- & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ١- \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$

٢ كانت مبيعات محل تجاريّ من أربعة أنواع من أجهزة الحاسوب أ، ب، جـ، د في أول شهرين من عام ٢٠١٨م ممثلة في المصفوفة س = $\begin{bmatrix} ١٠ & ١٧ & ١٥ & ١٢ \\ ٢٠ & ١٠ & ٢٠ & ١٦ \end{bmatrix}$، وكان ثمن الأجهزة ٤٥٠ دينار، ٣٠٠ دينار، ٥٠٠ دينار ، ٤٠٠ دينار، على الترتيب. استخدم المصفوفات لإيجاد المصفوفة التي تمثل مبيعات المحل من الأجهزة في الشهرين.

٣ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٧- \\ ٢ & ٤ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٦ \end{bmatrix}$ ، أجد ما يلي:

أ) ٥(أ . ب)　　ب) (٥أ) . ب　　جـ) أ . (٥ب)

٤ إذا كانت $\begin{bmatrix} أ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ب \end{bmatrix}$ ما قيمة كل من الثابتين أ، ب؟

النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

أولاً: المحددات: (Determinants)

نشاط (١)

يصنّفُ الخبراءُ الاقتصادَ الفلسطيني، بأنه في وضع المخاطرة. ويعود ذلك بشكل رئيسي إلى الإجراءات التي يقوم بها الاحتلال الإسرائيلي والتي تعيق نمو هذا الاقتصاد. لذا فإن المشاريع الصغيرة ذات رأس المال المحدود، والربح البسيط، تقلل من مخاطرة المستثمر.

يُتاجر أبو عارف بالأعلاف. اشترى خلال شهر أيلول ٢٠٠ كيساً من الأعلاف بسعر ١٠ دنانير للكيس الواحد، وباع منها ١٩٢ كيساً بسعر ١٣ ديناراً للكيس الواحد.

تنظم المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢٠٠ & ١٠ \\ ١٩٢ & ١٣ \end{bmatrix}$ بيانات تجارة أبو عارف خلال شهر أيلول.

- مجمل سعر البيع المتوقع لو أن أبو عارف باع جميع الأكياس= ٢٠٠ × ١٣=٢٦٠٠ دينار.
- مجمل سعر التكلفة لِما تم بيعه فعلاً من أكياس العلف =_____.
- الفرق بين سعر البيع المتوقع وسعر التكلفة لِما تمَّ بيعه=_____.

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، فإن **محدد المصفوفة** أ = $\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ هو عدد حقيقيّ ويرمز له بالرمز |أ| حيث |أ| = ($أ_{١١}$ × $أ_{٢٢}$) − ($أ_{١٢}$ × $أ_{٢١}$).

مثال (١)

أجد محدد كل من المصفوفات الآتية: ١) أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$ ٢) ب = $\begin{bmatrix} ٨ & ١٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

الحلّ:

١) $|أ| = (أ_{١١} \times أ_{٢٢}) - (أ_{١٢} \times أ_{٢١})$.

$|أ| = (٣ \times -٣) - (١ \times ٩)$

$= -٩ - ٩ = -١٨$

٢) $|ب| = \begin{vmatrix} ٨ & ١٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$

$|ب| = (ب_{١١} \times ب_{٢٢}) - (ب_{١٢} \times ب_{٢١})$.

$= (٨ \times ٣) - (١٢ \times ٢)$

$= ٢٤ - ٢٤$

= صفر



تعريف

تُسمى المصفوفة التي محددها يساوي صفر بالمصفوفة **المنفردة**.



مثـال (٢)

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} س-١ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أَجدُ قيمة س التي تجعل أ مصفوفة منفردة.

الحلّ:

بما أن أ مصفوفة منفردة فإن محدد $|أ| = ٠$

ومنها (س-١) × ٢ − ٢ × ٣ = صفر ومنها: ٢س-٢-٦ = صفر

٢س-٨=صفر

إذن س=٤.

مثـال (٣)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أجد كل مما يأتي:

١) $|أ|$ ٢) $|أ٣|$ ٣) $(٣)|أ|^{٢}$

الحلّ:

١) $|أ| = (١\times٣) - (٢\times١)$

$= ٢ - ٣ = -١$

٢) $أ٣ = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ ومنها $|أ٣| = (٣\times٦) - (٣\times٩)$

$= ١٨ - ٢٧ = -٩$

٣) $(٣)|أ|^{٢} = ٩- \times ١- = ٩-$ ماذا تُلاحظ؟

أتعلـــم

إذا كانت $أ$ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، ك عدد حقيقي ،فإن $|ك\ أ| = ك^{٢}|أ|$

نشاط (٢)

إذا كانت $أ$ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكانت $|أ٥| = ٥٠-$ ، فإن:

$|أ| =$ _____ . $|أ|٧ =$ _____ .

ثانياً: النظير الضربيّ للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

تعريف

إذا كانت $أ$ مصفوفة غير منفردة من الرتبة الثانية، فإن المصفوفة ب من الرتبة الثانية تسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة $أ$ إذا كان $أ . ب = ب . أ = م_{٢}$، حيث $م_{٢}$ المصفوفة المحايدة.

ويرمز للنظير الضربيّ للمصفوفة $أ$ بالرمز $أ^{-١}$، أي أن $أ . أ^{-١} = أ^{-١} . أ = م_{٢}$

مثـال (٤)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٨ & -٧ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & -٣,٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أبيّن أن المصفوفة ب هي النظير الضربيّ للمصفوفة أ.

الحلّ:

إذا كانت المصفوفة ب هي النظير الضربيّ للمصفوفة أ ، فإنّ أ . ب = ب . أ = $م_{٢}$

أ . ب = $\begin{bmatrix} -٨ & -٧ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -١ & -٣,٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ (لماذا؟)

كما أن: ب . أ = $\begin{bmatrix} -١ & -٣,٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -٨ & -٧ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ (لماذا؟)

إذن ب هي النظير الضربيّ للمصفوفة أ.

■ **أُفكر:** هل يوجد نظير ضربي للمصفوفة س = $\begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ، لماذا؟

أتعلـم

المصفوفة المنفردة ليس لها نظير ضربي.

مثـال (٥)

أحدد أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي وأيها لا؟

١) أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ٢) ب = $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

الحلّ:

١) |أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & ٧ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ = ١٢ − ٧ = ٥ ، إذن المصفوفة أ ليست منفردة، ويوجد لها نظير ضربيّ.

٢) |ب| = $\begin{vmatrix} ٨ & ٤ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١٦ − ١٦ = ٠ ومنها ب مصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربيّ.

تعريف

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{21} & أ_{22} \end{bmatrix}$ ، حيث $|أ| \neq$ صفر، فإن: $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \begin{bmatrix} أ_{22} & -أ_{12} \\ -أ_{21} & أ_{11} \end{bmatrix}$

مثال (٦)

أجد النظير الضربيّ للمصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$ (إن أمكن).

الحلّ:

$|أ| = (أ_{11} \times أ_{22}) - (أ_{12} \times أ_{21})$

$|أ| = (١ \times -٤) - (-٢ \times ١) = -٢$ ، اذا يوجد للمصفوفة $أ$ نظير ضربي

$أ^{-1} = \frac{-١}{٢} \begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -٠,٥ & ٠,٥ \end{bmatrix}$

نشاط (٣)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$، فإن: $|أ| = (٢ \times ٣) - (٥ \times ١) = ٦ - ٥ = ١$

ومنها: $أ^{-1} = \frac{١}{|أ|} \begin{bmatrix} أ_{22} & -أ_{12} \\ -أ_{21} & أ_{11} \end{bmatrix} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$|أ^{-1}| =$ _____ ، $(أ^{-1})^{-1} =$ _____ ماذا تُلاحظ؟

أتعلم

$(أ^{-1})^{-1} = أ$

ثالثاً: حل أنظمة المعادلات بطريقة النظير الضربيّ



نشاط (٤)

في نظام المعادلات الخطيّة الآتية:

٩س+٢ص= -٧ ، -٣س+٢ص=١٢

- تمثل (أ) مصفوفة المعاملات في النّظام، أي أن أ = $\begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$

- تمثل (جـ) مصفوفة الثوابت في النظام، أي أن جـ = _____.

- تمثل (ع) مصفوفة المتغيرات في النظام أي أن ع = = _____.

يمكن كتابة نظام المعادلات الخطيّة على صورة المعادلة المصفوفيّة الآتية:

$\begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ \\ ١٢ \end{bmatrix}$ (أتحقق من ذلك)



أناقش

كيف يمكن إيجاد قيم س ، ص؟



مثـال (٧)

استخدم طريقة النظير الضربيّ لحلّ نظام المعادلات الآتي:

٣س + ٤ص = ٦

س + ٢ص = ٠

الحلّ: أولاً: نُرتب المعادلات على الصورة أ ×ع= جـ، حيث:

أ: مصفوفة المعاملات.

ع: مصفوفة المتغيرات.

جـ: مصفوفة الثوابت.

$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٠ \end{bmatrix}$

ثانياً: نجد النظير الضربيّ لمصفوفة المعاملات(أ).

$|أ| = (٢\times٣) - (١\times٤) = ٢$ $\quad (|أ| \neq$ صفر)

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$$

ثالثاً: نضرب طرفي المعادلة من اليمين بالمصفوفة $أ^{-١}$ فينتج:

$أ^{-١} \cdot أ \cdot ع = أ^{-١} \cdot جـ$

باستخدام خاصية التجميع في ضرب المصفوفات ينتج:

$(أ^{-١} \cdot أ) \cdot ع = أ^{-١} \cdot جـ$

وباستخدام خاصيتي وجود النظير الضربيّ والمصفوفة المحايدة في ضرب المصفوفات ينتج: $م_٢ \cdot ع = أ^{-١} \cdot جـ$

إذن: $ع = أ^{-١} \cdot جـ$ أي أن: $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٦ \\ ٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٣- \end{bmatrix}$ إذن الحل:(س، ص) = (٦، -٣). أتحقق من صحة الحلّ.

نشاط (٥)

إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١- & ٣- \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فلإيجاد المصفوفة س:

أفرض أن $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١- & ٣- \end{bmatrix}$ فتصبح المعادلة على الصورة: $أ \times س = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

النظير الضربيّ للمصفوفة أ يساوي $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}$ (لماذا)؟

ومنها: $أ^{-١} \cdot أ \cdot س = أ^{-١} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١- & ٣- \end{bmatrix} \cdot س = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$ (لماذا)؟.

ومنها: س = _____.

تمارين ومسائل (٢ - ٤)

١ أَجد قيمة س التي تحقق $\begin{vmatrix} ١٢- & ٥ \\ ٣س & ٣- \end{vmatrix} = ٦$

٢ إذا كان |٤ب| = -٣٢، أجدُ: قيمة |ب| + |٣ب|، حيث ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

٣ أَجد النظير الضربيّ لكل من المصفوفات الآتية (إن أمكن):

$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

٤ أَكتب كلاً من الأَنظمة الخطيّة الآتية على صورة معادلات مصفوفيّة:

أ) ٥س − ص = ٢
٣س + ٤ص = -٥

ب) ص + ٢ = س − ص
س = ١٢

٥ أَحلّ كلاً من المعادلات المصفوفيّة الآتية:

أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \cdot س = \begin{bmatrix} ١٣- & ٢٦ \\ ٣٩ & ١٣ \end{bmatrix}$

ب) $٢س \cdot \begin{bmatrix} ٥ & ٦- \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٧ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

٦ أَستخدم طريقة النظير الضربيّ لحل أَنظمة المعادلات الآتية:

أ) ٢س − ص = -٧
س + ٢ص = -١

ب) ٢س − ٣ص = ١٣
ص + ٦ = س

حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كريمر

نشاط (١)

تعدّ المشاريع الصغيرة من الأفكار الاستثمارية قليلة المخاطرة، التي تساعد كل من المنتِج والمستهلك، ومن الأمثلة عليها مشروع توزيع المواد التموينية الذي لا يحتاج المستثمر فيه لرأس مال كبير.

يقوم مهند بتوزيع المواد التموينية على المحلات التجاريّة، فإذا أعطى للبقالة الأُولى ٨ صناديق من المعلبات، وصندوقين من العصير وكان ثمنها معاً ٤٠ ديناراً، بينما أعطى البقالة الثانية ٥ صناديق معلبات، و٣ صناديق من العصير مقابل ٣٢ ديناراً، فهل يمكن معرفة ثمن الصندوق الواحد من المعلبات والعصير؟

قاعدة كريمر:

تستخدم قاعدة كريمر لحلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، والذي يمكن كتابته بالصورة المصفوفية كالآتي: $أ \cdot ع = جـ$، حيث:

$أ$:مصفوفة المعاملات، ع: مصفوفة المتغيرات، جـ: مصفوفة الثوابت، $|أ| \neq$ صفر فيكون:

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} \quad \text{و} \quad ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$$ حيث:

$أ_س$: المصفوفة $أ$ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات س فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

$أ_ص$:المصفوفة $أ$ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات ص فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

مثال (١)

استخدمُ قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي:

س−ص=٤

٥س+٢ص=٦

الحلّ:

أَكتبُ نظام المعادلات الخطية على شكل معادلة مصفوفيّة:

$$\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

أفرض $أ = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = (٢\times١) - (٥\times١-) = ٧$

المصفوفة $أ_س = \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

ومنها: $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٤ & ١- \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} = (٢\times٤) - (٦\times١-) = ١٤$

المصفوفة $أ_ص = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$

ومنها: $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = (٦\times١) - (٥\times٤) = -١٤$

$\therefore س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{١٤}{٧} = ٢$ ، $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-١٤}{٧} = -٢$

إذن الحل : (س،ص) = (٢، -٢)

مثـال (٢)

استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي: $س - ٥ = ٢ص - ٤س$

$ص + س - ٤ = ٥ + ٣س$

الحلّ: أولاً: أرتب المعادلات في النظام على صورة: أس + ب ص = جـ

فيكون النظام: $٥س - ٢ص = ٥$

$-٢س + ص = ٩$

ثانياً: أكتبُ نظام المعادلات على شكل معادلة مصفوفيّة كالآتي:

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

أفرض $أ = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{vmatrix} = (١ \times ٥) - (-٢ \times -٢) = ١$$

$$|أ_س| = \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ٩ & ١ \end{vmatrix} = (١ \times ٥) - (-٢ \times ٩) = ٢٣$$

$$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٥ & ٥ \\ ٩ & -٢ \end{vmatrix} = (-٢ \times ٥) - (٩ \times ٥) = -٥٥$$

ومنها: $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٢٣}{١} = ٢٣$، كما أن : $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-٥٥}{١} = -٥٥$

إذن الحل: (س، ص) = (٢٣، -٥٥).

نشاط (٢)

استخدام قاعدة كريمر لحل المعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$$

الحلّ:

أفرض $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ $\quad |أ| = -٣ - ٢ = -٥$

$|أ_س| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} =$ _____ (لماذا)؟ ومنها: $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} =$ _____.

$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} =$ _____ (لماذا)؟ $\quad ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} =$ _____.

إذن الحل:(س ، ص) = (___ ، ___)

تمارين ومسائل (٢ - ٥)

١ إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية، وكان $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$، $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٩ & ٤ \end{vmatrix}$، $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٩ \end{vmatrix}$،

أجد قيمة كل من س، ص.

٢

استخدم قاعدة كريمر في حل أنظمة المعادلات الآتية:

أ) ٣س-٤ص=٨
س+ص= ١٢

ب) ٣س-٢ص-١٩=٠
ص+٣س=١٣

تمـــــارين عـــامـــة

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يلي:

١) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ فما قيمة $٢أ_{١٢} - ب_{٢١}$ ؟

أ) ٥ ب) ٢ ج) ١ د) -١

٢) إذا كانت $\begin{bmatrix} -١ & ٣ & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ص+س \\ ٢ & \end{bmatrix}$ فما قيمة س، ص على الترتيب؟

أ) (١ ، ٢) ب) (٢ ، ١) ج) (٥ ، ٢) د) (-١، ١)

٣) إذا كانت $ب = \begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$، فأي من المصفوفات الآتية تمثل $(ب^{-١})^{-١}$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & -٦ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٦ & -٥ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

٤) إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، وكان $|٢س| = ٨$ فما قيمة $|٣س|$؟

أ) ١٨ ب) ٦ ج) ٤ د) ٢

٥) أي من المصفوفات الآتية ليس لها نظير ضربيّ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٨ & -٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$

٦) إذا كانت $ص = \begin{bmatrix} جـ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$، $ص^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ فما قيمة الثابت جـ؟

أ) ٢ ب) ١ ج) -١ د) -٢

٧)عند حل نظام من معادلتين خطيتين، وُجِدَ أن ص = ٢ ، $|أ_س| = -٣$، $|أ_ص| = -٦$ ماقيمة س؟

أ) ٣ ب) ١ ج) -١ د) -٣

٨) إذا كان $\begin{bmatrix} أ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ \\ ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٤ ب) ٢ ج) ١ د) صفر

٩) إذا كانت أ،ب،جـ مصفوفات حيث أ . ب = جـ وكانت أ$_{١\times٣}$ ، جـ$_{٤\times٣}$ فما رتبة المصفوفة ب ؟

أ) ١×٤ ب) ١×٣ ج) ١×١ د) ٤×٣

١٠) ما قيمة س السالبة التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} س & ٨ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ منفردة ؟

أ) -٢ ب) -٤ ج) -٨ د) -١٦

السؤال الثاني: إذا كانت أ . ب= $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، أ . جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، أجدُ ناتج أ . (ب+جـ).

السؤال الثالث: أستخدمُ قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي:

٢س+١ = ص ، س-٢ص = ٤

السؤال الرابع: أستخدمُ طريقة النظير الضربيّ لحلّ نظام المعادلات الآتي:

س - ص + ١ = ٠، ٣س + ٣ص = ٦

السؤال الخامس: أجدُ قيمة/ قيم س التي تحقق المعادلة الآتية: $٣\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + س^{٢} = \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٦ & س \end{vmatrix}$ ؟

السؤال السادس: أجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة المصفوفية الآتية:

$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \cdot س = \begin{bmatrix} -١٤ & ٨ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$ ؟

السؤال السابع: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

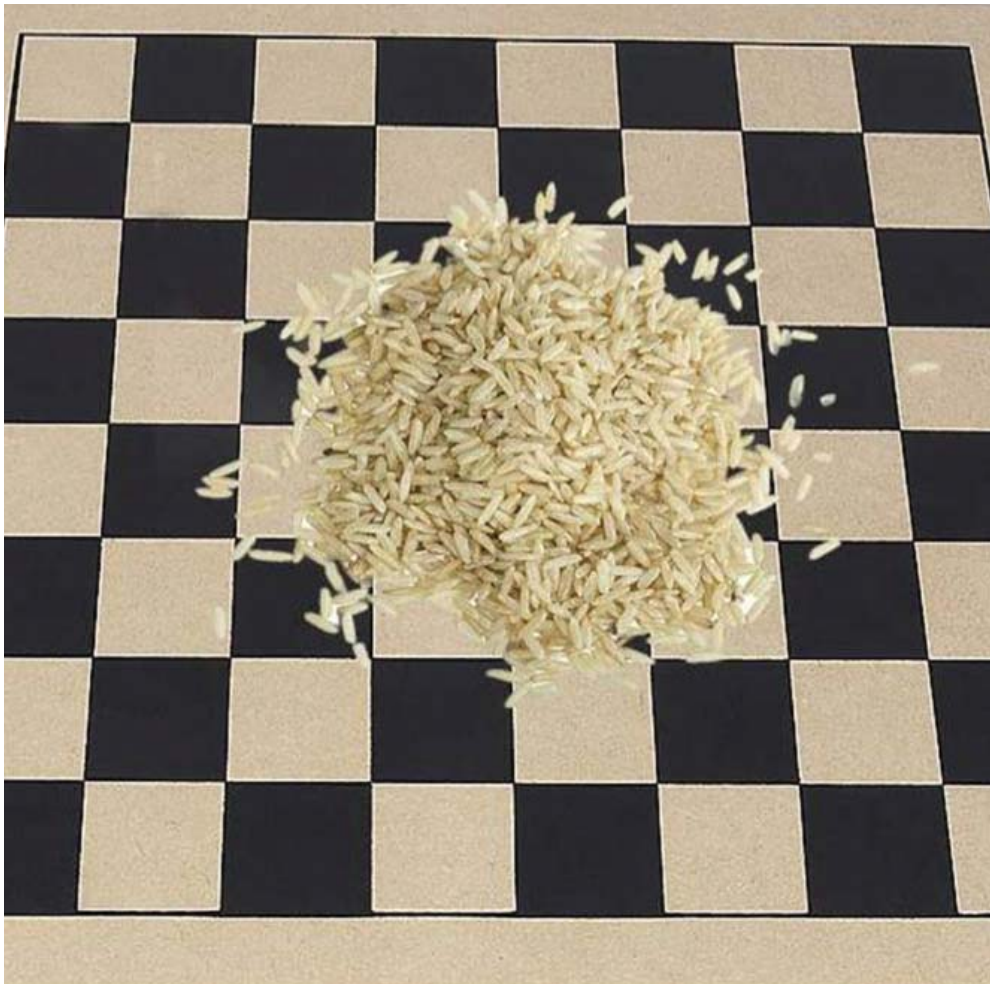
مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اميز انواع المصفوفات ومسمياتها الاساسية			
اجد محدد المصفوفة			
اوظف خواص المحددات في حل مشكلات حياتية			
احل معادلات مصفوفية بعدة طرق			

٣

الوحـــــدة

المعادلات والمتسلسلات

Equations and Series



في لوحة الشطرنج أعلاه، إذا وُضِع في المربع الأَول حبتا قمح، وفي الثاني ٤ حبات، وفي الثالث ٨حبات... وهكذا، كيف يمكن معرفة رقم المربع الذي توضع فيه ١٠٢٤ من حبّات القمح؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المعادلات والمتسلسلات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. حلّ معادلات أسية.
٢. حلّ معادلات لوغاريتماتية.
٣. التّعرف إلى مفهوم المتسلسلة.
٤. التّعرف إلى المتسلسلة الحسابية وإيجاد مجموعها.
٥. التّعرف إلى المتسلسلة الهندسية وإيجاد مجموعها.

المعادلات الأُسية:



نشاط (١)

فاقت سرعة انتشار الشبكة العنكبوتية كوسيلة إعلامية وسائل الإعلام الأُخرى جميعها، حيث استغرق الراديو أكثر من ٣٢سنة ليصل لـ٥٠ مليون مستمع حول العالم، فيما استغرق التلفاز ١٦ سنة ليصل إلى العدد نفسه من المشاهدين. أما الشبكة العنكبوتية فلم تستغرق سوى ٤ سنوات لتصل للعدد ذاته من المستخدمين

استغرقت الشبكة العنكبوتية لتنتشر ٤ أعوام $= (٢)^{٢}$ سنة.

واستغرق التلفاز لينتشر ١٦عاماً $= (٢)^{٤}$ سنة.

استغرق الراديو لينتشر ٣٢ عاماً $= (٢)^{٥}$ سنة.

مثال (١)

أجدُ مجموعة حلّ المعادلة $(٤)^{س} = ٦٤$.

الحلّ:

$٦٤ = (٤)^{٣}$

$(٤)^{س} = (٤)^{٣}$ ومنها: س = ٣ (لماذا؟)

مجموعة الحل هي {٣}

أَتذكّر:

لتكن أ ، م، ن ∈ ح ، أ ≠ ١ ، أ ≠ صفر فإن:

١) $(أ)^{م} \times (أ)^{ن} = أ^{م+ن}$

٢) $\frac{(أ)^{م}}{(أ)^{ن}} = أ^{م-ن}$

٣) $((أ)^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$

٤) $(أ)^{٠} = ١$

مثـال (٢)

أَحل المعادلة $(٢٧)^{٢س-١} = (٩)^{١-س}$

الحلّ:

$(٢٧) = (٣)^{٣}$ كذلك $٩ = (٣)^{٢}$

ومنها: $(٣)^{٦س-٣} = (٣)^{٢-٢س}$ (لماذا؟)

بما أَن الأَساسات متشابهة فتكون الأُسس متساوية:

أي أن: $٦س - ٣ = ٢ - ٢س$

$٨س = ٥$

ومنها مجموعة الحل: $\{\frac{٥}{٨}\}$

نشاط (٢)

لإيجاد مجموعة حلّ المعادلة $(٨)^{٢س-٣} = (\frac{١}{١٦})^{س-٢}$

أبدأ من الطرف الأيمن: $٨ = (٢)^{٣}$

ومنها $(٨)^{٢س-٣} = ((٢)^{٣})^{٢س-٣}$

$=$ _____ ..... (١)

في الطرف الأيسر: $\frac{١}{١٦} = (١٦)^{-١}$ (لماذا؟)

$= ((٢)^{٤})^{-١}$

$(\frac{١}{١٦})^{س-٢} = ((٢)^{-٤})^{س-٢} =$ _____ ..... (٢)

المعادلة $(٨)^{٢س-٣} = (\frac{١}{١٦})^{س-٢}$ تكافئ $(٢)^{٦س-٩} = (٢)^{-٤س-٨}$

بما أَن الأَساسات متشابهة، إذن الأُسس متساوية،

أي أنَّ: $٦س-٩ = -٤س-٨$

ومنها تكون مجموعة الحل: _____

تمارين ومسائل (٣ - ١)

١ أجدُ مجموعة حلّ كل من المعادلات الأسية الآتية:

أ) $(٨)^{٥س-٣} = (٤)^{٦-٣س}$

ب) $(٧)^{س-٢} = (٤٩)^{٥-٤س}$

جـ) $(٢٧)^{س-٢} = (٨١)^{-٢س}$

٢ ما مجموعة حلّ كل من المعادلات الأسية الآتية؟

أ) $(\frac{١}{٩})^{٣س-٥} = ٢٧$

ب) $(١٢٥)^{-٢س} = (٥)^{٢س-٩}$

جـ) $(٦)^{٢س-١} = ٢١٦$

المعادلات اللوغاريتمية

نشاط (١)



بدأ العمل في فلسطين حديثاً على إقامة أبنية مقاومة للزلازل، ويستخدم مقياس ريختر لقياس شدة الزلازل، وكل زيادة بمقدار درجة واحدة على هذا المقياس تمثِّل ١٠ أضعاف سابقتها في سعة الزلزال. لذا فإن زلزالاً بقوة ٥,٣ قوياً، في حين يعتبر زلزال آخر بقوة ٦,٣ مدمراً.

وتعتمد تقنية هذا الجهاز بشكل أساسي على اللوغاريتمات، حيث تعني الدرجة الواحدة ١٠ أضعاف الدرجة السابقة لها.

-درجة واحدة على مقياس ريختر= $\log_{10} 10$ = _____.

- درجتين على مقياس ريختر= $\log_{10} 100$ = _____.

- ٣ درجات على مقياس ريختر= _____.

نشاط (٢)

$\log_2 8 = 3$ لأن $2^3 = 8$ كما أن:

$\log_7 49$ = ____ لأن _____.

أُحوّل $64 = 8^2$ إلى الصورة اللوغريتمية _____.

$\log_2 (8 \times 16) = \log_2 8 + \log_2 16$

كما أن $\log_3 \left(\frac{27}{9}\right)$ = _____

أَتذكّر:

إذا كانت أ، س، ص > صفر، أ ≠ ١ فإن:

١) لـوأ ١ = صفر　　٢) لـوأ أ = ١

٣) لـوأ س = جـ تكافئ أ^جـ = س　　٤) لـوأ (س × ص) = لـوأ س + لـوأ ص

٥) لـوأ (س/ص) = لـوأ (س) − لـوأ (ص)　　٦) لـوأ س^ن = ن × لـوأ س ، س > ٠

مثـال (١)

أَحلّ المعادلة لـوأ س = ٣.

الحلّ:

لحلّ المعادلة اللوغاريتمية نحولها أَولاً للصورة الأُسية.

لـوأ س = ٣ تكافئ (٢)^٣ = س

ومنها: س = ٨

مثـال (٢)

أحلُّ المعادلة اللوغاريتمية الآتية: لـوأ (س^٢ − ٢س + ٥) = ٣

الحلّ:

لحلّ المعادلة اللوغاريتمية نحولها أَولاً للصورة الأُسية.

لـوأ (س^٢ − ٢س + ٥) = ٣ تكافئ : س^٢ − ٢س + ٥ = (٢)^٣

س^٢ − ٢س − ٣ = ٠　　ومنها: (س − ٣)(س + ١) = ٠　　مجموعة الحلّ: {-١ ، ٣}

مثـال (٣)

أَجدُ مجموعة حلّ المعادلة لو٤ ٦٤ = ٣ − ٢س

الحلّ: لحلّ المعادلة اللوغاريتمية نحولها أَولاً للصورة الأُسية.

(٤)^٣-٢س = ٤^٣ وبما أن الأساسات متشابهة فإن الأسس متساوية ،

٣ − ٢س = ٣

س = ٠ (لماذا)؟

مجموعة الحلّ: { ٠ }

تمارين ومسائل (٣ - ٢)

١ أَجدُ مجموعة حلّ كل من المعادلات الآتية:

أ) $\text{لـو}_{٣}(٥س - ٤) = ٤$

ب) $\text{لـو}_{٣}(٣٤٣) = ٢س - ١$

جـ) $\text{لـو}_{٣}(٦ - س) = ٣$

د) $\text{لـو}_{٥}(س^{٢} + ٣س - ٣) = ٠$

هـ) $\text{لـو}_{١٠}(١٠)^{٦} = ٢س + ٤$

٢ أَجدُ مجموعة حلّ المعادلة $\text{لو}_{٣}(س^{٢} - ٣) = ٠$

٣ أَحل المعادلة اللوغاريتمية الآتية: $\text{لـو}_{٣}(س - ١) - \text{لـو}_{٣}(٢س - ٥) = ١$

المتسلسلات



نشاط (١)

بدأت رياضة كرة السلة بالانتشار في أرجاء فلسطين في ثلاثينات القرن الماضي. وتقسم المباراة إلى ٤ فترات، مدة كل منها ١٠دقائق، وتحتسب النقاط للأهداف كالآتي:

نقطة واحدة: هدف من رمية حرة.

نقطتان: هدف مباشر من داخل منطقة الجزاء.

ثلاث نقاط: هدف من خارج منطقة الجزاء.

أحرز منتخب فلسطين لكرة السلة في إحدى مبارياته الخارجية عشرة أهداف في الربع الأول، الجدول الآتي يمثّل النقاط التي تم احتسابها عن تلك الأهداف:

الهدف	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد النقاط	٢	٢	٣	١	٢	٢	٢	١	١	٢

متتالية النقاط المحتسبة ($ف_ن$) = ٢، ٢، ٣ ، ١ ، ٢، ___، ___، ___، ___، ___، ___.

أما مجموع نقاط المنتخب ٢+٢+ ___+___+___+___+___+___+___+___+___+___

فتسمّى **متسلسلة** النقاط.

تعريف

المتسلسلة ($\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$) تمثّل مجموع حدود المتتالية ($ح_ر$) المقابلة لها، ويكون حدها العام ($\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$) ، ويعبر $جـ_ن$ عن مجموع حدودها.

مثال (١)

أكتب المتسلسلة المقابلة للمتتالية ف$_{ن}$ = {٣ ، -١ ، ٤ ، ٩ ، -٥}، ثم أجد مجموعها

الحلّ:

$$\sum_{ر=١}^{٥} ف_{ر} = ٣ + -١ + ٤ + ٩ + -٥ .$$

لاحظ أن: $\sum_{ر=١}^{٥} ف_{ر} = جـ_{٥}$

ومنها: جـ$_{٥}$ = ١٠ (لماذا؟)

مثال (٢)

إذا كان ح$_{ن}$ = ن^{٢}+١ ، أكتب المتسلسلة المقابلة لها، ثم أجد مجموع أول ٤ حدود منها (جـ$_{٤}$).

الحلّ:

المتسلسلة هي $\sum_{ر=١}^{ن} ح_{ر} = \sum_{ر=١}^{ن} (ر^{٢}+١)$

$$\sum_{ر=١}^{٤} (ر^{٢}+١) = ٢ + ٥ + ١٠ + ١٧$$

ومنها: جـ$_{٤}$ = ٣٤

نشاط (٢)

المتتالية ٣،٤،٥،٦،.....،١٣ متتالية منتهية وهذا يعني أن المتسلسلة ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ... + ١٣ منتهية أيضاً، لكن المتتالية ٤٨،٢٤،١٢،٦... غير منتهية، لذا فإن المتسلسلة ٤٨ + ٢٤ + ١٢ + ٦ + ... هي متسلسلة_____.

مثـال (٣)

أَجدُ مجموع أَول ٣ حدود في المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{\infty} (٢ر - ٧)$

الحلّ: $ح_{١} = ٢(١) - ٧ = -٥$

$ح_{٢} = ٢(٢) - ٧ = -٣$

$ح_{٣} = ٢(٣) - ٧ = -١$

إذن $جـ_{٣} = -٥ + -٣ + -١ = -٩$.

مثـال (٤)

أَجدُ مجموع أَول ٣ حدود من المتسلسلة: $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{ر}{٢ر + ١} \right)$

الحلّ:

$$جـ_{٣} = \sum_{ر=١}^{٣} \left(\frac{ر}{٢ر + ١} \right) = \frac{١}{٣} + \frac{٢}{٥} + \frac{٣}{٧}$$

$$= \frac{٣٥}{١٠٥} + \frac{٤٢}{١٠٥} + \frac{٤٥}{١٠٥}$$

$$جـ_{٣} = \frac{١٢٢}{١٠٥}$$

تمارين ومسائل (٣ - ٣)

١ أَكتبُ الحدود الأربعة الأولى من مفكوك كلّ من المتسلسلات الآتية:

أ) $\sum_{ن=١}^{٥} \left(\frac{ن^{٢}}{ن + ٢} \right)$

ب) $\sum_{ن=١}^{\infty} ن^{٢}$

٢ أَيّ المتسلسلات الآتية منتهية وأَيها غير منتهية:

أ) $٢ + ٨ + ١٨ + ٣٢ + \ldots$

ب) $١ + ٨ + ٢٧ + ٦٤ + ١٢٥$

جـ) $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{٢ن + ١}{ن + ٢} \right)$

٣ أَجدُ مجموع ($جـ_{ن}$) كل من المتسلسلات الآتية:

أ) $\sum_{ن=١}^{٦} (٢ن^{٢} - ٣ن - ٤)$

ب) $\sum_{ن=١}^{٤} (٨)$

جـ) $\sum_{ن=١}^{٥} \frac{٢ن + ١}{ن + ٢}$

٤ إذا كان مجموع الحدود الأربعة الأولى من المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٢ن + أ}{ن + ٢}$ يساوي $\frac{٩٧}{٥}$، فما قيمة الثابت أ؟

المتسلسلة الحسابية ومجموعها



نشاط (١)

تعتبر زراعة الفراولة من الاستثمارات المجدية من الناحية المادية للمزارع الفلسطيني. ويراعى عند نقلها، توزيعها، في عبوات تتسع لكميات قليلة نسبياً، حفاظاً على جودتها.

إذا وُزّع إنتاج مزرعة فراولة في غزة في يوم ما على عبوات تتسع كل منها لـ٣ كغم، فإن كتلة الفراولة في العبوتين الأُولى والثانية معاً = ٣+ ٣ كغم

كتلة الفراولة في أول ٣ عبوات=_____ كغم.

كتلة الفراولة في أول ٤ عبوات=_____ كغم.

متسلسلة كتلة الفراولة المنتَجة في المزرعة والموزعة في (ن) عبوة هي: ٣ + ٣ + ... + ٣ كغم.

أَتذكّر:

المتتالية الحسابية: هي المتتالية التي يكون الفرق بين أي حدين متتاليين فيها يساوي مقداراً ثابتاً دائماً.

وحدها العام $ح_ن = أ + (ن - ١) د$، حيث أ: الحد الأول، د: الأساس، ن: رتبة الحد النوني.

أتعلم

تعرف المتسلسلة الحسابية بأنها مجموع حدود المتتالية الحسابية المرتبطة بها.

مثـال (١)

أُميّز المتسلسلة الحسابية من غيرها فيما يأتي:

١) ٧ +١٠+ ١٣ + ١٦ + ١٩

٢) ٨ + ٦ + ٥ + ٣ + ٢

الحلّ:

١) المتسلسلة حسابية ، لأَن:

١٠ – ٧ = ١٣ –١٠ = ٣

١٦ – ١٣ =١٣ – ١٠ = ٣

١٩ – ١٦=١٦ – ١٣ = ٣

٢) المتسلسلة ليست حسابية ، لأَن ٦ – ٨= –٢ ، بينما ٥ – ٦= -١

٦ – ٨≠ ٥ – ٦.

نشاط (٢)

بدأَ فني كهربائيات عام ٢٠١٨ م العمل في إحدى المصانع الفلسطينية براتب سنوي قدره ٦٠٠٠ دينار، حيث يتقاضى علاوة سنوية ثابتة قدرها ١٠٠دينار.

المتسلسلة الحسابية التي تمثِّل ما سيتقاضاه الفني سنوياً من بداية عام ٢٠١٨م حتى نهاية عام ٢٠٢٠م هي: ___

_____.

مجموع هذه الرّواتب يساوي _____.

الحد الأَول في متسلسلة الرواتب: أ=٦٠٠٠ وأساسها: د = ١٠٠

إذن مجموعها = $\sum$ _____.

أتعلـــم

مجموع أول ن حداً من حدود متسلسلة حسابية حدها الأول $أ_1$ وأساسها د ، يعطي بالقانون:

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (٢أ_1 + (ن - ١) \times د).$$

مثـال (٢)

أجدُ مجموع أول ٤٠ حدّاً من المتسلسلة الحسابية ١٢+١٠+٨+٦+...

الحلّ:

$أ_1 = ١٢$ ، $د = -٢$ ، $ن = ٤٠$

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (٢أ_1 + (ن - ١) \times د).$$

$$جـ_{٤٠} = \frac{٤٠}{٢} (٢ \times ١٢ + (٤٠ - ١) \times -٢)$$

$$= ٢٠ (٢٤ + ٣٩ \times -٢)$$

$$= ٢٠ (٢٤ - ٧٨) = -١٠٨٠$$

مثـال (٣)

أجدُ مجموع المتسلسلة ٤+٨+١٢+١٦+٢٠+٢٤.

الحلّ:

المتسلسلة حسابية (لماذا)؟ وفيها: $أ_1 = ٤$، $د = ٤$، $ن = ٦$

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (٢أ_1 + (ن - ١) \times د)$$

$$جـ_٦ = \frac{٦}{٢} (٢ \times ٤ + (٦ - ١) \times ٤)$$

$$= ٣(٨ + ٥ \times ٤) = ٨٤.$$

أُلاحظ أَن:

$$جـ_٦ = \frac{٦}{٢}(٢ \times ٤ + (٦ - ١) \times ٤)$$

$$= \frac{٦}{٢}(٤ + ٤ + (٦ - ١) \times ٤)$$

لكن: $ح_٦ = ٤ + (٦ - ١) \times ٤$ وهو الحد الأَخير.

إذن $جـ_٦ = \frac{٦}{٢}(٤ + ح_٦)$

$= ٣ (٤ + ٢٤)$

$= ٨٤$ هل يمكن إيجاد الناتج بطريقة أُخرى؟

نتيجة: يمكن إيجاد مجموع أَول ن حدود من متسلسلة حسابية حدها الأَول **أ** ، و حدها الأَخير **ل** بالقاعدة:

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$$

نشاط (٣)

أَجدُ $\sum_{ن=١}^{٦٠} (١٢ - ن)$

الحلّ: ألاحظ أن المتسلسلة حسابية (لماذا)؟

$ح_١ = ١٢ - ١ = ١١ = أ$

$ح_{٦٠} = ١٢ - ٦٠ = -٤٨$

إذن المتسلسلة حسابية، فيها $أ = ١١$ ، $ل = -٤٨$، $ن = ٦٠$

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$$

$جـ_{٦٠} =$ _____ .

مثـال (٤)

أَجدُ الحد الخامس عشر في المتسلسلة الحسابية التي يعطى مجموعها بالعلاقة: $جـ_ن = ٤ن - ن^٢$

الحلّ:

ألاحظ أَن الحد الأَول $أ = جـ_١$.

$$جـ_١ = ٤(١) - (١)^٢ = ٣$$

ومنها: $أ = ٣$

مجموع أَول حدين = $جـ_٢ = ح_١ + ح_٢$

$$= ٤(٢) - (٢)^٢ = ٨ - ٤ = ٤$$

ومنها: $ح_٢ = (جـ_٢ - جـ_١)$

$$ح_٢ = ٤ - ٣ = ١$$

كما أن أَساس المتسلسلة = $ح_٢ - ح_١$ (لماذا)؟

$$= ١ - ٣ = -٢$$

$$د = -٢$$

ومنها: $ح_ن = ٣ + (ن - ١) \times -٢$

$$ح_{١٥} = ٣ + (١٥ - ١) \times -٢$$

$$= -٢٥$$

(هل هناك حلول إخرى؟).

تمارين ومسائل (٣ - ٤)

١ أَكتبُ الحدود الأربعة الأولى من مفكوك كلّ من المتسلسلات الآتية:

أ) $\sum_{ن=١}^{٧} (٣ن + ١)$

ب) $\sum_{ن=١}^{١٧} (٢ر)$

٢ متسلسة حسابية حدها الأَول ١٤، وأساسها يساوي ٥ أَجدُ مجموع أَول ٢٠ حداً منها.

٣ أَجدُ الحد الأَول في المتسلسلة الحسابيّة التي أَساسها ٢ ومجموع أَول ٦٠ حداً فيها يساوي ١٢٠

٤ كم حداً يجب أَخذه من متسلسلة حسابية حدها الأَول ٣ وأَساسها ٦ ليكون مجموع تلك الحدود = ٢٧؟

٥ متتالية حسابية حدها الأول ٣ وحدها الستون = ٨٧ ، أجد $جـ_{٦٠}$.

المتسلسلة الهندسية ومجموعها

نشاط (١)

تمتاز محافظة أريحا عن غيرها من المحافظات الفلسطينية بالنشاط السياحي، وذلك لكثرة المواقع الأثرية فيها، أما المناطق غير الأثرية فتُستثمر في إنشاء منتجعات سياحية تجذب السياح الذين يزورون المحافظة.

يريد مستثمر إقامة منتجع سياحي متكامل على قطعة أرض مربعة الشكل في محافظة أريحا تشمل، منطقة ملاهي وألعاب، مسبح ومرافق، مطعم، وموقف للمركبات، بحيث تقع جميعها في مستوى أفقي واحد، وتشغل القطعة كاملةً.

مساحة كل منطقة على الترتيب: ٣٢٠٠م^{٢} ، ١٦٠٠م^{٢} ، ٨٠٠م^{٢} ، ٤٠٠م^{٢}

أ) المتسلسلة الدالة على مجموع المساحات: _____

ب) المساحة الكلية لقطعة الأرض تساوي: _____

أتذكّر:

المتتالية الهندسية: هي المتتالية التي تكون النسبة بين أي حدين متتاليين فيها يساوي مقداراً ثابتاً دائماً.

وحدها العام $ح_ن = أ ر^{(ن-١)}$، حيث أ: الحد الأول، ر: الأساس، ن: رتبة الحد النوني

أتعلم

تعرف المتسلسلة الهندسية بأنها مجموع المتتالية الهندسية المرتبطة بها.

مثال (١)

أُميّزُ المتسلسلات الهندسية مما يأتي:

أ) ٨١ + ٢٧ + ٩ + ٣ + ١.

ب) ٦ + ٩ + ١٢ + ١٥ + ١٨.

الحلّ: أ) متسلسلة هندسية ، لأن $\frac{٢٧}{٨١} = \frac{٩}{٢٧} = \frac{١}{٣}$

$\frac{٣}{٩} = \frac{٩}{٢٧} = \frac{١}{٣}$

$\frac{١}{٣} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

ب) ليست هندسية، لأن $\frac{٩}{٦} = \frac{١٢}{٩} \neq$

أتعلـــم

مجموع أول ن حد من حدود متسلسلة هندسية حدها الأول $أ$ وأساسها $ر$ ،

يعطي بالقانون $ج_ن = أ \left(\frac{ر^ن - ١}{ر - ١} \right)$ ، $ر \neq ١$

مثـال (٢)

أجدُ مجموع المتسلسلة ٣ + ٩ + ٢٧ + ٨١ + ٢٤٣.

الحلّ:

المتسلسلة هندسية (لماذا)؟ ومنها $أ = ٣$ ، $ر = ٣$ ، $ن = ٥$

$ج_ن = أ \left(\frac{ر^ن - ١}{ر - ١} \right)$

$ج_٥ = \frac{٣ (٢٤٣ - ١)}{٣ - ١} = ٣٦٣$ (لماذا؟)

مثـال (٣)

أجد مجموع أول ٥ حدود من المتسلسلة الهندسية ١ + ٤ + ١٦ + ٦٤ + ...

الحلّ: $أ = ١$ ، $ر = ٤$ ، $ن = ٥$

$ج_ن = أ \left(\frac{ر^ن - ١}{ر - ١} \right)$

$جـ_{٥} = ١ \times \frac{(١٠٢٤ - ١)}{٤ - ١} = ٣٤١$ (لماذا؟)

نشاط (٢)

$\sum_{ن=١}^{٨} (٢^{ن}) =$

$= ٢^{١} + ٢^{٢} + ٢^{٣} + ٢^{٤} + ... + ٢^{٨}$

ألاحظ أن المتسلسلة هندسية لأن :

فيها: $أ = ٢$ ، $ر = ٢$ ، ن = _____

إذن: $جـ_{٨}$ = _____

مثـال (٤)

أَجدُ الحد الثامن للمتسلسلة الهندسية التي مجموع أول ٣ حدود منها =٢٨، وأساسها = ٢

الحلّ:

$جـ_{ن} = أ \left(\frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١} \right)$

$جـ_{٣} = \frac{أ(٨ - ١)}{(٢ - ١)}$

$أ \times ٧ = ٢٨$

ومنها: $أ = ٤$ (لماذا؟)

$ح_{٨} = أ ر^{ن-١}$

$ح_{٨} = ٤ \times ٢^{٧}$. أي أن حدها الثامن = ٥١٢

تمارين ومسائل (٣ - ٥)

١ أَجدُ مجموع المتسلسلات الهندسية الآتية:

أ) $\sum_{ن=١}^{٤} (٢ \times ٣^{ن})$.

ب) ١ + ٥ + ٢٥ + ١٢٥ + ٦٢٥.

ج) $٤ - ١ + \frac{١}{٤} - \frac{١}{١٦}$

٢ متسلسلة هندسية حدها الأَول ٧ و أَساسها -١ ، أَجدُ مجموع أَول عشر حدود منها.

٣ أَجدُ الحد الأَول في المتسلسلة الهندسية التي أَساسها ٢ ومجموع أَول أَربعة حدود يساوي ٦٠.

٤ كم حداً يلزم أَخذه من متسلسلة هندسية حدها الأَول ٤ وأَساسها ٣ ليكون مجموعها ١٦٠ ؟

تمـــــارين عـــامـــة

السؤال الأَول: أضعُ دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

١) متسلسلة حسابية حدها الأَول ٣ وحدها العاشر ٢١، ما مجموع أَول عشرة حدود منها؟

أ) ٢٠ ب) ٤٠ ج) ٥٠ د) ١٢٠

٢)متسلسلة هندسية حدها الأَول -١ ، أَساسها $\frac{١}{٣}$ ، ما مجموع أَول ثلاثة حدود منها؟

أ) $\frac{-١٣}{٩}$ ب) $\frac{٩}{١٣}$ ج) $\frac{٤}{٣}$ د) $\frac{٥٢}{٨١}$

٣) ما قيمة $\sum_{ك=١}^{٥} (-١)^{ك}$ ؟

أ) -٥ ب) -١ ج) ١ د) ٥

٤) ما عدد الحدود اللازم أَخذها ليصبح مجموع المتسلسلة ٥+١٠+٢٠ +.. يساوي ٦٣٥؟

أ) ٧ ب) ٦ ج) ٥ د) ٤

٥) متسلسلة حسابية مجموع أَول ستة عشر حداً فيها ٣٢، وأَساسها -٢، ما حدها الأَول؟

أ) ٣٤ ب) ١٧ ج) ١٦ د) -١٣

٦) ما قيمة: $لـو_{٣}$ (٢٤٣ × ٨١)؟

أ) ٥ ب) ٢٠ ج) ٩ د) ٤

٧) ما قيمة س التي تحقق المعادلة ٦٤ = $(\frac{١}{٣٢})^{١-س}$ ؟

أ) -٥ ب) $\frac{-١}{٥}$ ج) ٥ د) $\frac{١١}{٥}$

٨) ما مجموعة حلّ المعادلة: $لـو_{٢٧}(٣)^{٣س-١}$ = ٥

أ) ٧ ب) ٣ ج) $\frac{١٦}{٣}$ د) -٧

السؤال الثـــاني: أكتب أول ٥ حدود لمتسلسلة حسابية مجموع حديها الثاني والتاسع = ٢٥، ومجموع حديها الثالث والسابع =٢٠.

السؤال الثـــالث: كم حداً يلزم أخذه من المتسلسلة الهندسية ١ + ٣ + ٩ .... ليكون المجموع مساوياً ٣٦٤.

السؤال الرابـــع: إذا كان مجموع أول ن حداً من متسلسلة حسابية يعطى بالعلاقة جـ$_{ن}$=ن(٢ن+١) أجدُ الحد الأول والأساس لتلك المتسلسلة.

السؤال الخامس: تعاقد مهندس مع إحدى الشركات براتب سنوي قدره ١١٥٠٠ دينار وبزيادة سنوية قدرها ٥٠ ديناراً.

أ) ما الراتب السنوي الذي تقاضاه هذا الموظف في نهاية السنة السادسة؟

ب) ما مجموع ما تقاضاه خلال عشر سنوات؟

السؤال السادس: ما مجموعة حلّ كل من المعادلتين الأُسيتين الآتيتين؟

أ) $٢(١٦٩)^{٢س+٧} = ٢٦$ ب) $(٩)^{س+٤} = (٢٧)^{٤س}$

السؤال السابع: ما مجموعة حلّ كل من المعادلتين اللوغاريتميتين الآتيتين؟

أ) $\text{لـــو}_{٥}(٢٥)^{٢س-٣} = \text{لـــو}_{٨}(٦٤)^{س}$ ب) $\frac{\text{س لـــو}_{١٠}(٠,٠٠٠١)}{\text{لـــو}_{١٠٠}(١٠٠٠٠٠٠)} = -١$

السؤال الثـــامن: ما مجموعة حلّ المعادلة: $\frac{١}{٢}$ س^{٢} لـــو$_{٨}$(٦٤) + س لـــو$_{٣}$(٢٤٣) + ٢ لـــو$_{٥}$(١٢٥) = ٠

السؤال الثـــامن: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
احل معادلات اسية			
احل معادلات لوغريتيمية			
اجد مجموع متسلسلة حسابية			
اجد مجموع متسلسلة هندسية			

الوحـــــدة ٤

الإحصاء
Statistics



لاحظ التماثل في جبل طابور...ماذا يعني لك هذا التماثل؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التوزيع الطبيعي المعياري في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى العلامة المعيارية.
٢. التعرف إلى التوزيع الطبيعي المعياري وخواصه.
٣. استخدام الجداول في ايجاد المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.
٤. توظيف خواص التوزيع الطبيعي المعياري في حل مشكلات حياتية.

العلامة المعيارية

نشاط (١)

كثيراً ما نضطر لإطلاق أحكام على أمور ظاهرية دون الأخذ بعين الاعتبار سياقها العام. ويتصف هذا النوع من الاحكام بعدم الموضوعية في أغلب الأحيان. الجدول الآتي يبين علامات خمس طالبات من الصف العاشر خلال شهرين في مبحث اللغة العربية.

الطالبة	سناء	يسرى	دعاء	هديل	سلمى
اختبار شهر أيلول	٩٢	٨٩	٨٧	٨٨	٩٠
اختبار شهر تشرين أول	٧٧	٨٠	٧٩	٧٦	٧٤

- ترتيب أسماء الطالبات تنازلياً حسب علاماتهن خلال شهر أيلول:

سناء، سلمى، يسرى، هديل، دعاء.

- ترتيب أسماء الطالبات تنازلياً حسب علاماتهن خلال شهر تشرين أول:

_____، _____، _____، _____، _____.

- في أي الشهرين كان أداء دعاء أفضل؟ لماذا؟

تستخدم العلامة المعيارية في إطلاق أحكام على قيم عددية للظواهر مع الأخذ بعين الاعتبار الوسط الحسابي تلك القيم، وانحرافها المعياري.

تعريف

العلامة المعيارية: إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات يساوي (μ) وانحرافها المعياريσ، فإن العلامة المعيارية(ع) المقابلة للقيمة (س) تمثِّل عدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها القيمة س عن الوسط الحسابي للبيانات. وبالرموز فإنّ: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

مثال (١)

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات (٣٠) طالبا في الصف الثاني عشر الأدبي في اختبار الجغرافيا يساوي (١٣) وانحرافها المعياري (٢). فإذا حصل ثلاثة طلاب على العلامات: ١١ ،١٣ ،٢٣، فما هي القيم المعيارية المناظرة لكل منهم؟

الحلّ:

$$ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

العلامة المعيارية (ع) المقابلة للعلامة (س =١١) هي $ع = \frac{١١ - ١٣}{٢}$ ← ع = -١

العلامة المعيارية (ع) المقابلة للعلامة (س =١٣) هي $ع = \frac{١٣ - ١٣}{٢}$ ← ع = ٠

العلامة المعيارية (ع) المقابلة للعلامة (س =٢٣) هي $ع = \frac{٢٣ - ١٣}{٢}$ ← ع = ٥

أناقش

ماذا يعني أن تكون العلامة المعيارية لإحدى القيم تساوي صفر؟

نشاط (٢)

حصل ناصر في الشعبة (أ) على علامة ٨٥ في اختبار الرياضيات، فيما حصل محمد في شعبة(ب)على علامة ٨٠ في الاختبار نفسه. الجدول المجاور يبيّن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكلا الشعبتين، أيّ الطالبين كان تحصيله أفضل؟

الشعبة	μ	σ
أ	٧٩	٦
ب	٧٦	٢

الحلّ: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

$ع_{ناصر} = \frac{٨٥ - ٧٩}{٦} = ١$ (لماذا؟)

$ع_{محمد}$ = _____.

إذن تحصيل _____ أفضل من تحصيل _____.

مثـال (٢)

إذا كان الوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الآباء يساوي (٤٣) سنة وانحرافها المعياري (٥) سنة وكانت العلامة المعيارية المقابلة للعمر(س) تساوي (٤) ما العمر س؟

الحلّ:

$$ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$٤ = \frac{س - ٤٣}{٥}$$

$$٢٠ = س - ٤٣$$

$$س = ٦٣$$

نشاط (٣)

كانت أَعمار مجموعة من الأَشخاص كالآتي: ١٢، ١٦، ١٨، ٢٠، ٢٤.

١) الوسط الحسابي لأَعمار هؤلاء الأَشخاص تساوي ١٨، و انحرافها المعياري = ٤

٢) - العلامة المعيارية ($ع_١$) المناظرة للعمر ١٢تساوي - ١,٥

- العلامة المعيارية($ع_٢$) المناظرة للعمر١٦تساوي _____.

- العلامة المعيارية ($ع_٣$) المناظرة للعمر١٨تساوي _____.

- العلامة المعيارية ($ع_٤$) المناظرة للعمر٢٠تساوي _____.

- العلامة المعيارية ($ع_٥$) المناظرة للعمر٢٤تساوي _____.

٣) الوسط الحسابي لمجموعة العلامات المعيارية = $\frac{ع_١ + ع_٢ + ع_٣ + ع_٤ + ع_٥}{٥}$ = _____.



أتعلـــم*

الوسط الحسابي لجميع العلامات المعيارية لتوزيع ما يساوي صفر،

وانحرافها المعياري يساوي واحد.



مثـال (٣)

أُخذت أَطوال ٥ أشخاص، وكانت العلامات المعيارية المناظرة لتلك الأَطوال كالآتي:

٠,٥، **ك**، ١,٥ ، ٠، -٠,٥ فما قيمة **ك**

الحلّ:

الوسط الحسابي للعلامات المعيارية = $\frac{٠,٥ + \text{ك} + ١,٥ + ٠ + -٠,٥}{٥}$ = صفر

أَي أَن:

ك + ١,٥ = صفر (لماذا)؟

ك = -١,٥

* مجموع العلامات المعيارية لتوزيع ما يساوي صفر.

تمارين ومسائل (٤ - ١)

١ إذا كان μ = ٢٠ ، σ = ٤، ما العلامة المعيارية (ع) التي تقابل العلامة س = ٢٨.

٢ إذا كان مجموع علامات ٥٠ طالباً في امتحان التاريخ يساوي ١٠٠٠، وانحرافها المعياري $\frac{٥}{٢}$ ، ما العلامة المعيارية المناظرة للعلامة ١٥؟

٣ إذا كان الوسط الحسابي لأطوال ٢٠ طالباً يساوي ١٥٠سم وانحرافها المعياري ٢ سم، ما الطول الذي علامته المعيارية = ٣؟

٤ إذا كان الوسط الحسابي لكتلة مجموعة من الأشخاص يساوي ٥٠كغم، وانحرافها المعياري σ كغم، وكانت العلامتان المعياريتان المقابلتان للكتلتين: س، ٦٠ هما -٢ و ٤ على الترتيب:

أ) فما قيمة كل من س و σ؟

ب) مالعلامة المعيارية المقابلة للكتلة ٥٨كغم؟

التّوزيع الطبيعي المعياري



نشاط (١)

الهيموجلوبين هو بروتين موجود داخل كريات الدّم الحمراء، وهو الذي يكسب خلايا الدّم اللّون الأحمر، وتتلخّص وظيفته في نقل الأُكسجين من الرئة إلى مختلف أعضاء الجسم حتّى تقوم بوظائفها على أكمل وجه. وتتراوح نسبة الهيموجلوبين في الدم عند الرجال البالغين في العالم بين ١٣ و١٧غرام/ديسيليتر.

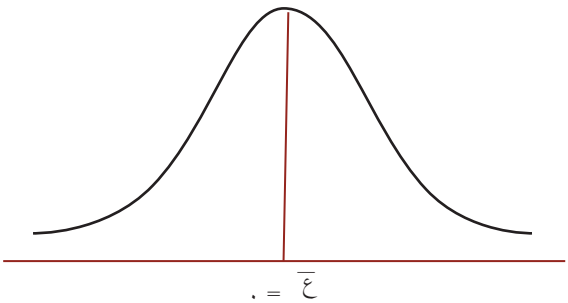
تتوزع نسبة الهيموجلوبين في الدم بشكل طبيعي بين الرجال البالغين. فقليلٌ منهم تنخفض لديهم هذه النسبة في الدم عن ١٣، كذلك نسبة قليلة جداً تزيد نسبة الهيموجلوبين عندهم عن ١٧.

- إذا كانت نسبة الهيموجلوبين في الدم لدى عُمر ١٠,٤، فمستوى الهيموجلوبين لديه منخفض.
- إذا كانت نسبة الهيموجلوبين في الدم لدى خالد ١٥,٣، فمستوى الهيموجلوبين لديه _____.
- إذا كانت نسبة الهيموجلوبين في الدم لدى علي ١٨,٢، فمستوى الهيموجلوبين لديه_____.

ظاهرة توزيع الهيموجلوبين في الدم ليست الوحيدة التي تتوزع طبيعياً، فالطول والوزن، وكمية الأمطار التي تهطل في منطقة ما جميعها لها ذات الميزة.

تعريف

منحنى التوزيع الطبيعي المعياري هو منحنى تكراري لتوزيع العلامات المعيارية مقابل تكراراتها، بوسط حسابي يساوي صفر، وانحراف معياري يساوي واحد.



وهذا الشكل يشبه شكل الجرس.

وأهم خصائصه:

١. متماثل حول $\overline{ع}$ = .

٢. يُقسّم المحور الأُفقي فيه بمقدار انحراف معياري واحد بكل وحدة.

٣. المساحة المحصورة بين المنحنى والمحور الأُفقي تساوي وحدة مربعة واحدة.

ومن الجدير بالإشارة أَن المساحة المحصورة بين قيمتين معياريتين يمكن حسابها من خلال جداول منظمة ودقيقة أُعدّت لهذا الغرض. لاحظ الملحق (١).

نشاط (٢)

أَستخدم الجداول في حساب المساحة المحصورة بمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري والواقعة تحت (ع= ١,١٦)

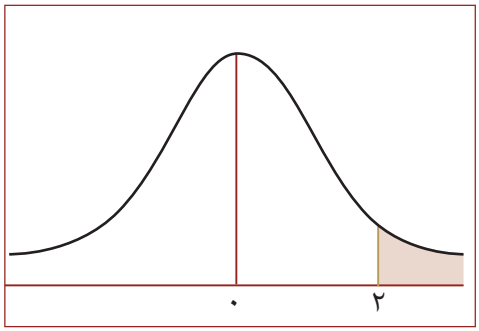
ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠										
٠,١										
٠,٢										
٠,٣										
٠,٤										
٠,٥										
٠,٦										
٠,٧										
٠,٨										
٠,٩										
١,٠										
١,١							٠,٨٧٧٠			
١,٢										

أجد من الجدول أن : المساحة تحت (ع= ١,١٦) = ٠,٨٧٧٠

مثـال (١)

أَستخدم الجداول في حساب المساحة المحصورة بمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري والواقعة:

١. تحت (ع = ١) ٢. تحت (ع = ١,٤٢) ٣. فوق(ع = ٢)



الحلّ: ١. المساحة تحت (ع = ١) تساوي ٠,٨٤١٣

٢. المساحة تحت ع = (١,٤٢) تساوي ٠,٩٢٢٢

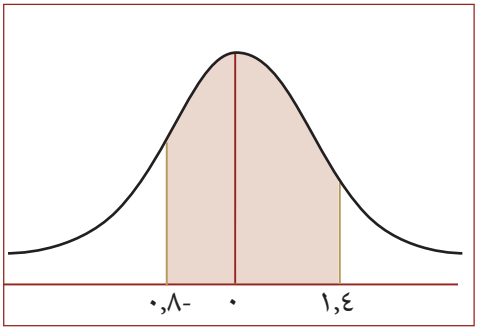
٣. المساحة فوق (ع = ٢)= ١- المساحة تحت (ع = ٢)

= ١- ٠,٩٧٧٢

= ٠,٠٢٢٨

نشاط (٣)

أَحسبُ نسبة المساحة المحصورة بين: (ع = -٠,٨) و(ع = ١,٤)



الحلّ:

المساحة تحت (ع = -٠,٨) = ٠,٢١١٩

المساحة تحت (ع = ١,٤) = ٠,٩١٩٢

إذن نسبة المساحة المحصورة بين (ع = -٠,٨) و (ع = ١,٤) إلى المساحة الكلية تساوي _____

أتعلـــم

نسبة المساحة المحصورة تحت منحنى التوزيع الطبيعي عندما (ع < ع١) إلى المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي المساحة تحت (ع = ع١)

مثـال (٢)

استخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري في إيجاد نسبة المساحة في كل مما يأتي :

١) عندما (ع ≥ ٠,٧٤)　　٢) عندما (ع ≥ -٢,٦٤)

٣) عندما (٢≥ع ≥ ٣)　　٤) عندما (ع ≤ -٢,٥٢)

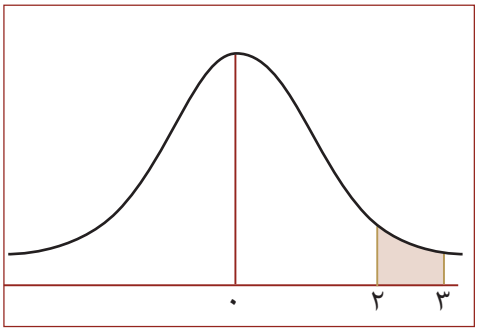
الحلّ:

١) عندما (ع ≥ ٠,٧٤) فإن نسبة المساحة تحت (ع = ٠,٧٤) = ٠,٧٧٠٤

ألاحظ أن المساحة المحصورة تحت (ع = ٠,٧٤) تشكل ما نسبته ٧٧,٠٤٪ من المساحة الكلية تحت المنحنى.

(لماذا؟)

٢) عندما (ع ≥ -٢,٦٤) فإن نسبة المساحة تحت (ع = -٢,٦٤)



= _____

٣) عندما (٢≥ع ≥ ٣) فإن نسبة المساحة بين (ع = ٢ ، ع = ٣)

= المساحة تحت (ع = ٣) − المساحة تحت (ع = ٢)

= ٠,٩٩٨٧ − ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢١٥

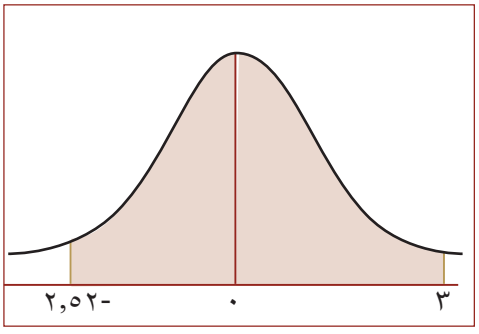
ألاحظ أن المساحة المحصورة بين ع = ٢ و ع = ٣ تمثل ما نسبته ٢,١٥٪ من المساحة الكلية تحت المنحنى.

٤) عندما (ع ≤ -٢,٥٢) = نسبة المساحة فوق (ع = -٢,٥٢)

= ١ − نسبة المساحة تحت ع = -٢,٥٢

= ١ − ٠,٠٥٩ = ٠,٩٩٤١

عندما (ع ≤ -٢,٥٢) تساوي _____



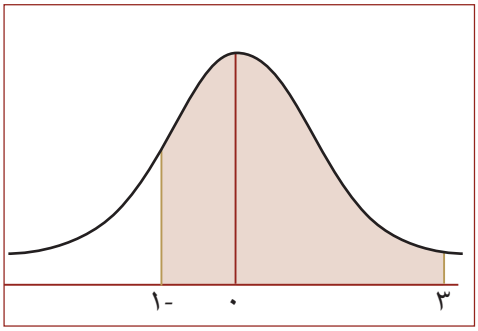
تطبيقات على التوزيع الطبيعي المعياري:

تقدّم ١٠٠٠ طالب لامتحان ما في جامعة النجاح الوطنية. فإذا كانت علامات الطلبة تتبع التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي ٦٠ وانحرافه المعياري ١٠ . أَجـــــــدُ:

أ) النسبة المئوية للطلبة الذين تنحصر علاماتهم بين ٥٠، و٩٠.

ب) عدد الطلبة الذين علاماتهم تزيد عن ٨٠ .

الحلّ:



أ) أفرض أَن س تمثِّل علامات الطلبة، حيث μ = ٦٠ ، σ = ١٠

عندما س = ٥٠ فإن: $ع = \frac{٦٠ - ٥٠}{١٠} = -١$

عندما س = ٩٠ فإن: $ع = \frac{٦٠ - ٩٠}{١٠} = ٣$

إذن النسبة التي تمثل (٥٠ ≤ س ≤ ٩٠) = نسبة المساحة عندما (-١ ≤ ع ≤ ٣)

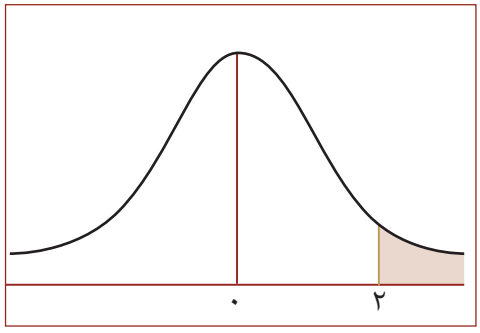
= (المساحة تحت ع = ٣) − (المساحة تحت ع = ١)

= ٠,٩٩٨٧ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٨٤٠

إذن النسبة المئوية = ٠,٨٤٠ × ١٠٠٪ = ٨٤٪

ب) عندما س = ٨٠ فإن: $ع = \frac{٦٠ - ٨٠}{١٠} = ٢$

إذن النسبة التي تمثل (س ≤ ٨٠) = نسبة المساحة فوق (ع = ٢)



= ١ − المساحة تحت (ع = ٢)

= ١ − ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

النسبة المئوية = ٠,٠٢٢٨ × ١٠٠٪ = ٢,٢٨٪

إذن عدد الطلبة = ٠,٠٢٢٨ × ١٠٠٠ ≈ ٢٣ طالباً.

تمارين ومسائل (٤ - ٢)

١ استخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري في إيجاد نسبة المساحة لكل من الآتية:

أ) عندما (ع ≥ ٠,٣٤) ب) عندما (ع ≤ -١,٦٤) جـ) عندما (-٢ ≤ ع ≤ ١,٦٧)

٢ إذا كان عمر التشغيل لبطارية سيارة من إنتاج مصنع فلسطيني يتبع التوزيع الطبيعي، بوسط حسابي ٢٠٠٠ ساعة، وانحراف المعياري ١٢٠ ساعة، ما النسبة المئوية للبطاريات التي يكون عمر التشغيل لها أكثر من ١٨٢٠ ساعة؟

٣ خطّ إنتاج في مصنع ينتج ٤٠٠ كيس من السكر تتبع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي يساوي ١,٠١، كغم وانحراف معياري يساوي ٠,٠٢كغم . أَجـــــــــدُ:

أ) النسبة المئوية للأَكياس التي كتلتها أَقل من ١,٠٣ كغم من إنتاج هذا الخط.

ب) عدد الأَكياس التي كتلتها أَكثر من ١,٠٢ كغم.

ج) النسبة المئوية للأَكياس التي تتراوح كتلتها بين ١كغم و ١,٠٥ كغم.

٤ تقدم ١٠٠٠ طالب في إحدى الجامعات الفلسطينية لامتحان عام في المهارات التقنية. وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ٦٨ وانحراف معياري σ، فإذا كان عدد الطلبة الذين حصلوا على علامة ٦٠ على الأقل هو ٧١٩ طالب.

أ) ما قيمة σ؟

ب) ما النسبة المئوية للطلبة الذين حصلوا على علامة ٤٠ على الأقل؟

جـ) ما عدد الطلبة الذين حصلوا على علامة ٧٠ على الأكثر؟

تمـــــارين عـــامـــــة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة لكل من الأسئلة الآتية:

١) إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من العلامات يساوي ٥٦ والانحراف المعياري يساوي ٤
فما العلامة التي تنحرف انحرافين معياريين تحت الوسط؟

أ) ٥٧ ب) ٤٨ جـ) ١٢ د) -١٢

٢) إذا كان الفرق بين طولي شخصين يساوي ١٥سم، والفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لطوليهما يساوي ١,٥ ، فما الانحراف المعياري σ ؟

أ) ١٥ ب) ١,٥ ج) ١٠ د) ٠,٧٥

٣) إذا كانت كتلتا شخصين ٨٥كغم ، ٨٠ كغم، وكانت العلامتان المعياريتان المناظرتان لهما ١، -٢ على الترتيب فما الانحراف المعياري؟

أ) ١ ب) $\frac{٣}{٥}$ ج) $\frac{٥}{٣}$ د) ١٠

٤) إذا كانت ع تتبع التوزيع الطبيعي وكانت المساحة عندما (ع $>$ ٢,٢٣) = ك
ما نسبة المساحة عندما (ع $<$ -٢,٢٣)؟

أ) ك ب) ١ – ك ج) ك – ١ د) ك + ١

٥) إذا كانت س تتبع التوزيع الطبيعي بوسط الحسابي μ وانحراف معياري σ ، ما قيمة المساحة الممكنة عندما (س$<\mu$) ؟

أ) ٠,٠٥ ب) ٠,٥٠ ج) ١ د) صفر

السؤال الثاني: إذا كان ع يتبع التوزيع الطبيعي، أجد نسبة المساحة في كل مما يأتي:

أ) عندما (ع $\leq$ ١,١٣) ب) عندما (ع $\geq$ ١,٤٢)

جـ) عندما (-١,٣٥ $\leq$ ع $\leq$ ٢,٠١) د) عندما (-١,٤١ $\leq$ ع $\leq$ ٢,٤٥)

السؤال الثالث: إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات يساوي ٥٠ والانحراف المعياري لها ١٠ أَجد:

أ) العلامة المعيارية المناظرة للمفردة ٦٠

ب) المفردة المناظرة للعلامة المعيارية -١,٥

السؤال الرابع: إذا كانت س تمثل علامات طلبة صف ما بحيث س تتبع التوزيع الطبيعي حيث أَن الوسط الحسابي يساوي ٢٠ والانحراف المعياري يساوي ٤

أَجد كلاً مما يأتي:

أ) نسبة المساحة عندما (س ≤ ١٦)

ب) نسبة المساحة عندما (س ≥ ٩)

السؤال الخامس: إذا كانت العلامتان المعياريتان المناظرتان للعلامتين ١٧ ، ٣٥ هما -١،٣ على الترتيب، فما الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات الخام؟

السؤال السادس: صَفّ مكون من ٤٠ طالباً، إذا كانت علامات الطلاب رامي، محمد ، رائد هي ٨٠، ٩٠، س على الترتيب، وعلاماتهم المعيارية المناظرة هي: ٢، ٣، -١ على الترتيب، فما قيمة س؟

السؤال السابع: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اجد العلامة المعيارية			
اجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي			
احل مسائل منتمية لايجاد كل من الوسط والانحراف المعياري			
اوظف المنحنى الطبيعي في حل مشكلات حياتية			

إجابات التمارين والمسائل

الوحدة الأولى

تمارين (١-١) صفحـــ(٩)ـــة

١ أ) -٢ ب) ٧ ج) $\frac{١}{٧}$

٢ ٣ ٣ ١٥ ٤ -١ ٥ ٤ ٦ $-\frac{٥}{٩}$

تمارين (١-٢) صفحـــ(١٣)ـــة

١ أ) ٠ ب) ٣ جـ) ١ د) $\frac{٥}{٣}$ هـ) ٣

٢ أ) $\frac{-٦٤}{س^{٦}}$ ب) ٠ جـ) ٢٠س^{٣} ٣ ٤٢ ٤ ٥

تمارين (١-٣) صفحـــ(١٩)ـــة

١ أ) صفر ب) ١٠ جـ) $\frac{٥}{٣}$ د) -٣

٢ أ) -١ ب) $\frac{٤س - ٣س^{٢} + ٢١}{(٢ - ٣س)^{٢}}$ جـ) $\frac{-٢س}{٣}$

د) -٤٩ هـ) -١٦ و) -٦٠

٣ $\frac{١}{٢}$ ٤ ١

٥ -١ ٦ -١

٧ ٣

تمارين (١-٤) صفحـ(٢٩)ـة

١ ق(-٢) = ٦ عظمى محلية ، ق(٠) = ١ صغرى محلية

٢ أ) ق(س) متزايد على [-١، ∞[، ومتناقص على الفترة]-∞ ، -١]

ب) للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س = -١ وقيمتها -٤

٣ -٤ ٤ الاقتران هـ(س) متزايد على الفترة]-∞ ، -٢] ومتناقص على الفترة [-٢ ، ∞[.

٥ أ) الاقتران ك(س) متزايد على]-∞ ، -٥] ∪ [١ ، ∞[ومتناقص على [-٥ ، ١].

ب) للاقتران ك(س) قيمة عظمى محلية عند س = -٥ وقيمتها $\frac{٨٥}{٣}$ ، وله قيمة صغرى محلية عند س = ١ وقيمتها $-\frac{٢٣}{٣}$

٦ ع/(س) موجبة على ح

تمارين (١-٥) صفحـ(٣٥)ـة

١ أ) $س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س + جـ$ ب) $\frac{٥س^{\frac{٧}{٥}}}{٧} + جـ$ ج) $\frac{٧س^{\frac{٨}{٧}}}{٨} + جـ$

د) $\frac{-٢}{س^{٣}} - \frac{٢}{٥س} + جـ$ هـ) $١٤س^{٤} + \frac{٧س^{٣}}{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} + جـ$ و) $(٥^{٤٠٠٢})س + جـ$

٢ ٥ ٣ ٦س + ٢ ٤ $س^{٢} + ٣$

٥ أ) ق(س) = $س^{٣} + ٨س + ١$ ب) ص = ٢٠س + ١٧

تمارين (١-٧) صفحـ(٤٢)ـة

١ أ) $-\frac{٣}{٢}$ ب) صفر ج) $\frac{٤١}{٣}$

٢ -١٦ ٣ -٢٤ ٤ -٢

٥ ±١ ٦ ٣٣ ٧ ٢٤

تمارين عامة صفحـ(٤٨)ـة

١

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
إجابة الفقرة	د	أ	أ	جـ	جـ	أ	جـ	د	جـ	ب

٢ ١٢ **٣** $\frac{١}{٧}$ **٤** -٢ ، ٢ **٥** -٢ ، ٣

٦ أ) متزايد على الفترة [١، ∞[ومتناقص على]-∞ ، ١] .

ب) للاقتران هـ(س) قيمة صغرى محلية عند س = ١ وقيمتها -٣ .

الوحدة الثانية

تمارين (٢-١) صفحـ(٥٧)ـة

١ $\begin{bmatrix} ٥٠٠ & ٤٧٠ & ٢٣٠ \\ ٤٠٠ & ٢٥٠ & ١٨٠ \end{bmatrix}$

٢ أ) رتبة المصفوفة أ هي ٣×٢. رتبة المصفوفة ب هي ٣×٣. رتبة المصفوفة جـ هي ١×٣.

ب) المصفوفة أ صفرية ، المصفوفة ب مربعة ، المصفوفة جـ مصفوفة صف.

جـ) جـ$_{٢١}$ = ٣ ، أ$_{١٢}$ = ٠ ، ب$_{٣١}$ = -٨

٣ أ) جـ = -٤ ، ب = -٣ ب) ∴ جـ = ٩ ، ب = -٢ جـ) جـ = ±٣ ، ب = ٠ ، ب = ١

٤ س = ٣، ص = ١

تمارين (٢-٢) صفحـة(٦٦)ـة

١ أ) $أ = \begin{bmatrix} ٣٢ \\ ٢٥ \\ ٢٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣٠ \\ ٢٠ \\ ١٦ \end{bmatrix}$ ب) ٣٨ جـ) $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$

٢ ١٠

٣ أ) س + ص = $\begin{bmatrix} ١٥ & ٨ & ٥ & ٧ \\ ٨ & ٩ & ٧ & ١١ \end{bmatrix}$ ، ب) ٣س + ٤ص = $\begin{bmatrix} ٤- & ١١- & ٦- & ١٤ \\ ١٠ & ١- & ٢١- & ٢٣- \end{bmatrix}$

جـ) ٥ص − س = $\begin{bmatrix} ٢٧ & ٢٢ & ١٣ & ١- \\ ٤ & ١٥ & ٢٩ & ٣٧ \end{bmatrix}$ ، د) س-٢ع لايمكن لاختلاف الرتب ، هـ) $\begin{bmatrix} ١٤ & ١٠ & ٦ & ٢ \\ ٤ & ٨ & ١٢ & ١٦ \end{bmatrix}$

٤ $\begin{bmatrix} ١١ & ٢- & ٣- \\ ١٥ & ٦ & ١٥ \end{bmatrix}$

٥ $\begin{bmatrix} ٥- & \frac{٧}{٢}- \\ ١٠- & ١- \\ ٢ & ١١- \end{bmatrix}$

٦ أ) $\begin{bmatrix} ٦ & ٧- \\ ١٦- & ٢- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٦- & ١٠ \\ ٢- & ١٤- \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢- & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

تمارين (٢-٣) صفحـة(٧١)ـة

١ أ) $\begin{bmatrix} ١٠- & ٥٢ & ٥- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣٩ & ١١ \\ ٤ & ٣٣ \end{bmatrix}$

٢ $\begin{bmatrix} ٢١٩٠٠ \\ ٢٨٤٠٠ \end{bmatrix}$

٣ أ) $\begin{bmatrix} ٨٠ \\ ١٠٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٨٠ \\ ١٠٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$

٤ أ = ١ ، ب = ٩

تمارين (٢-٤) صفحـة(٧٩)ـة

١ س = ٢

٢ - ٢٠

٣ أ) $أ^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٧} & \frac{٣}{٧} \\ \frac{-٣}{٧} & \frac{-٢}{٧} \end{bmatrix}$

ب) $ب^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & ٠ \\ \frac{٢}{٥} & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$

جـ) لا يوجد لها نظير ضربي

٤ أ) $\begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ -٥ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١٢ \end{bmatrix}$

٥ أ) $س = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١٤ & -٧ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} \frac{١٧}{٤} & \frac{-٢٩}{٤} \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

٦ أ) س = -٣ ، ص = ١

ب) س = ٥ ، ص = -١

تمارين (٢-٥) صفحـة(٨٣)ـة

١ س = ١ ، ص = ٢

٢ أ) س = ٨ ، ص = ٤

ب) س = ٥ ، ص = -٢

تمارين عامة (٢) صفحـة(٨٤)ـة

١

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
إجابة الفقرة	د	ب	ب	أ	د	ب	ب	جـ	أ	ب

٢ $أ(ب + جـ) = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

٣ س = -٢ ، ص = -٣

٤ س = $\frac{١}{٢}$، ص = $\frac{٣}{٢}$

٥ س = ١ ، س = ٣

٦ $\begin{bmatrix} -٥ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

الوحدة الثالثة

تمارين (٣-١) صفحـ(٩٠)ـة

١ أ) {١} ب) {$\frac{٤}{٣}$} جـ) {٢}

٢ أ) {$\frac{٧}{٦}$} ب) {٣} جـ) {٢}

تمارين (٣-٢) صفحـ(٩٣)ـة

١ أ) {٤} ب) {٢} جـ) {-٢١} د) {١،-٤} هـ) {١}

٢ ±٢ ٣ $\frac{١٤}{٥}$

تمارين (٣-٣) صفحـ(٩٧)ـة

١ أ) $\frac{١}{٣} + ١ + \frac{٩}{٥} + \frac{٨}{٣}$ ب) ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦

٢ أ) غير منتهية ب) منتهية جـ) غير منتهية

٣ أ) ٩٥ ب) ٣٢ جـ) $\frac{٢٨٢٣}{٤٢٠}$

٤ ١٦

تمارين (٣-٤) صفحـ(١٠٣)ـة

١ أ) ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣

ب) ٢ + ٤ + ٨ + ١٦

٢ ١٢٣٠

٣ -٥٧

٤ ٣

٥ ٢٧٠٠

تمارين (٣-٥) صفحـ(١٠٧)ـة

١ أ) ٢٤٠ ب) ٧٨١ جـ) $\frac{٥١}{١٦}$

٢ ٠

٣ ٤

٤ ٤

تمارين عامة (٣) صفحـــ(١٠٨)ـــة

١

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
إجابة الفقرة	د	أ	ب	أ	ب	جـ	د	جـ

٢ -١٠ + -٥ + ٠ + ٥ + ١٠

٣ ٦

٤ أ = ٣ ، ى = ٤

٥ أ) ١١٧٥٠ ب) ١١٧٢٥٠

٦ أ) $-\frac{١٣}{٤}$ ب) $\frac{٤}{٥}$

٧ أ) ٣ ب) $\frac{٣}{٤}$

٨ -٢ ، -٣

تمارين (٤-١) صفحـ(١١٦)ـة

١ ع = ٢

٢ ع = -٢

٣ س= ١٥٦

٤ أ) $\sigma = \frac{٥}{٢}$ ، س = ٤٥

ب) $\frac{١٦}{٥}$

تمارين (٤-٢) صفحـ(١٢٢)ـة

١ أ) ٠,٦٣٣١ ب) ٠,٩٤٩٥ ج) ٠,٩٢٩٧

٢ ٩٣,٣٢٪

٣ σ = ١٠

٤ أ) ٨٤,١٣٪ ب) ١٢٣ ج) ٦٦,٨٧٪

٥ أ) σ = ١٣,٨ ب) ٩٧,٨٨٪ ج) ٥٦٠ طالب تقريباً

تمارين عامة صفحـ(١٢٣)ـة

١

١	٢	٣	٤	٥
ب	جـ	جـ	ب	ب

٢ أ) ٠,١٢٩٢ ب) ٠,٩٢٢٢ جـ) ٠,٨٨٩٣ د) ٠,٩١٣٦

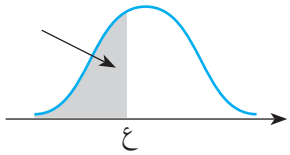
٣ أ) ١ ب) ٣٥

٤ أ) ٠,٨٤١٣ ب) ٠,٠٠٣

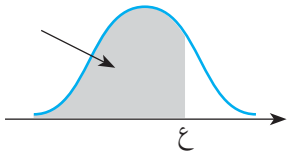
٥ μ = ٢١,٥ ، σ = ٤,٥

٦ ٥٠

ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي



ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
-٣,٧	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
-٣,٦	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
-٣,٥	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢
-٣,٤	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٢
-٣,٣	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٣
-٣,٢	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥
-٣,١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧
-٣,٠	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١٠
-٢,٩	٠,٠٠١٩	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٤
-٢,٨	٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٢٥	٠,٠٠٢٤	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٢	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢٠	٠,٠٠١٩
-٢,٧	٠,٠٠٣٥	٠,٠٠٣٤	٠,٠٠٣٣	٠,٠٠٣٢	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٣٠	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٢٨	٠,٠٠٢٧	٠,٠٠٢٦
-٢,٦	٠,٠٠٤٧	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٤٤	٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٤١	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٣٩	٠,٠٠٣٨	٠,٠٠٣٧	٠,٠٠٣٦
-٢,٥	٠,٠٠٦٢	٠,٠٠٦٠	٠,٠٠٥٩	٠,٠٠٥٧	٠,٠٠٥٥	٠,٠٠٥٤	٠,٠٠٥٢	٠,٠٠٥١	٠,٠٠٤٩	٠,٠٠٤٨
-٢,٤	٠,٠٠٨٢	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٧٨	٠,٠٠٧٥	٠,٠٠٧٣	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٦٩	٠,٠٠٦٨	٠,٠٠٦٦	٠,٠٠٦٤
-٢,٣	٠,٠١٠٧	٠,٠١٠٤	٠,٠١٠٢	٠,٠٠٩٩	٠,٠٠٩٦	٠,٠٠٩٤	٠,٠٠٩١	٠,٠٠٨٩	٠,٠٠٨٧	٠,٠٠٨٤
-٢,٢	٠,٠١٣٩	٠,٠١٣٦	٠,٠١٣٢	٠,٠١٢٩	٠,٠١٢٥	٠,٠١٢٢	٠,٠١١٩	٠,٠١١٦	٠,٠١١٣	٠,٠١١٠
-٢,١	٠,٠١٧٩	٠,٠١٧٤	٠,٠١٧٠	٠,٠١٦٦	٠,٠١٦٢	٠,٠١٥٨	٠,٠١٥٤	٠,٠١٥٠	٠,٠١٤٦	٠,٠١٤٣
-٢,٠	٠,٠٢٢٨	٠,٠٢٢٢	٠,٠٢١٧	٠,٠٢١٢	٠,٠٢٠٧	٠,٠٢٠٢	٠,٠١٩٧	٠,٠١٩٢	٠,٠١٨٨	٠,٠١٨٣
-١,٩	٠,٠٢٨٧	٠,٠٢٨١	٠,٠٢٧٤	٠,٠٢٦٨	٠,٠٢٦٢	٠,٠٢٥٦	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٤٤	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٣٣
-١,٨	٠,٠٣٥٩	٠,٠٣٥١	٠,٠٣٤٤	٠,٠٣٣٦	٠,٠٣٢٩	٠,٠٣٢٢	٠,٠٣١٤	٠,٠٣٠٧	٠,٠٣٠١	٠,٠٢٩٤
-١,٧	٠,٠٤٤٦	٠,٠٤٣٦	٠,٠٤٢٧	٠,٠٤١٨	٠,٠٤٠٩	٠,٠٤٠١	٠,٠٣٩٢	٠,٠٣٨٤	٠,٠٣٧٥	٠,٠٣٦٧
-١,٦	٠,٠٥٤٨	٠,٠٥٣٧	٠,٠٥٢٦	٠,٠٥١٦	٠,٠٥٠٥	٠,٠٤٩٥	٠,٠٤٨٥	٠,٠٤٧٥	٠,٠٤٦٥	٠,٠٤٥٥
-١,٥	٠,٠٦٦٨	٠,٠٦٥٥	٠,٠٦٤٣	٠,٠٦٣٠	٠,٠٦١٨	٠,٠٦٠٦	٠,٠٥٩٤	٠,٠٥٨٢	٠,٠٥٧١	٠,٠٥٥٩
-١,٤	٠,٠٨٠٨	٠,٠٧٩٣	٠,٠٧٧٨	٠,٠٧٦٤	٠,٠٧٤٩	٠,٠٧٣٥	٠,٠٧٢١	٠,٠٧٠٨	٠,٠٦٩٤	٠,٠٦٨١
-١,٣	٠,٠٩٦٨	٠,٠٩٥١	٠,٠٩٣٤	٠,٠٩١٨	٠,٠٩٠١	٠,٠٨٨٥	٠,٠٨٦٩	٠,٠٨٥٣	٠,٠٨٣٨	٠,٠٨٢٣
-١,٢	٠,١١٥١	٠,١١٣١	٠,١١١٢	٠,١٠٩٣	٠,١٠٧٥	٠,١٠٥٦	٠,١٠٣٨	٠,١٠٢٠	٠,١٠٠٣	٠,٠٩٨٥
-١,١	٠,١٣٥٧	٠,١٣٣٥	٠,١٣١٤	٠,١٢٩٢	٠,١٢٧١	٠,١٢٥١	٠,١٢٣٠	٠,١٢١٠	٠,١١٩٠	٠,١١٧٠
-١,٠	٠,١٥٨٧	٠,١٥٦٢	٠,١٥٣٩	٠,١٥١٥	٠,١٤٩٢	٠,١٤٦٩	٠,١٤٤٦	٠,١٤٢٣	٠,١٤٠١	٠,١٣٧٩
-٠,٩	٠,١٨٤١	٠,١٨١٤	٠,١٧٨٨	٠,١٧٦٢	٠,١٧٣٦	٠,١٧١١	٠,١٦٨٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٣٥	٠,١٦١١
-٠,٨	٠,٢١١٩	٠,٢٠٩٠	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٣٣	٠,٢٠٠٥	٠,١٩٧٧	٠,١٩٤٩	٠,١٩٢٢	٠,١٨٩٤	٠,١٨٦٧
-٠,٧	٠,٢٤٢٠	٠,٢٣٨٩	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٢٧	٠,٢٢٩٦	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٠٦	٠,٢١٧٧	٠,٢١٤٨
-٠,٦	٠,٢٧٤٣	٠,٢٧٠٩	٠,٢٦٧٦	٠,٢٦٤٣	٠,٢٦١١	٠,٢٥٧٨	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥١٤	٠,٢٤٨٣	٠,٢٤٥١
-٠,٥	٠,٣٠٨٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠١٥	٠,٢٩٨١	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩١٢	٠,٢٨٧٧	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨١٠	٠,٢٧٧٦
-٠,٤	٠,٣٤٤٦	٠,٣٤٠٩	٠,٣٣٧٢	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٠٠	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٢٨	٠,٣١٩٢	٠,٣١٥٦	٠,٣١٢١
-٠,٣	٠,٣٨٢١	٠,٣٧٨٣	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٠٧	٠,٣٦٦٩	٠,٣٦٣٢	٠,٣٥٩٤	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٢٠	٠,٣٤٨٣
-٠,٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤١٦٨	٠,٤١٢٩	٠,٤٠٩٠	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠١٣	٠,٣٩٧٤	٠,٣٩٣٦	٠,٣٨٩٧	٠,٣٨٥٩
-٠,١	٠,٤٦٠٢	٠,٤٥٦٢	٠,٤٥٢٢	٠,٤٤٨٣	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٠٤	٠,٤٣٦٤	٠,٤٣٢٥	٠,٤٢٨٦	٠,٤٢٤٧
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٠١	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٢١	٠,٤٦٨١	٠,٤٦٤١



تابع جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨
٣,٥	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨
٣,٦	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩
٣,٧	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩

أفكار ريادية

* تصميم دليل ارشادي لمدينة القدس للتعريف باهميتها، مع ابراز اهم معالمها التاريخية والسياحية.
* تصميم اداة لقياس اثر استخدام مواقع التواصل الاجتماعي على تحصيل الطلبة .
* تعاني المحافظات الجنوبية (قطاع غزة) من مشكلات الماء والكهرباء ، اصمم مقترحا لعرضه على الحكومة للتتخفيف من حدة هذه الازمات .
* إعداد رحلات معرفية (Web quest) عن وحدة التفاضل.

المراجع

الخطيب، روحي إبراهيم (٢٠١٢): التفاضل والتكامل ج١، دار المسيرة، عمان .
الخطيب، روحي إبراهيم (٢٠١٢): التفاضل والتكامل ج٢، دار المسيرة، عمان .
بسيوني، جابر أحمد(٢٠١٤): الإحصاء العام، دار الوفاء لدنيا الطباعة، الإسكندرية .
عدنان عوض، أحمد علاونة، مفيد عزام، (١٩٩٠) –دار الفكر – عمان –الأردن
حنيف، عاصم (١٩٩٩): حساب التفاضل والتكامل ، دار المعارف القاهرة
خليفة عبد السميع (١٩٩٤)، تدريس الرياضيات في المدرسة الثانوية: الطبعة الثالثة، كلية التربية، جامعة القاهرة
فريدريك بل (١٩٨٦): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الأول (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع
فريدريك بل (١٩٨٦): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع
ابو أسعد، صلاح عبد اللطيف (٢٠١٠): أساليب تدريس الرياضيات، الطبعة الاولى. دار الشروق للنشر والتوزيع
الزغلول، عماد (٢٠٠٥): الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.
حسين فرج، عبد اللطيف (٢٠٠٥): طرق التدريس في القرن الواحد والعشرين، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة/ عمان
Bostock&Perkins(1989): Advanced Mathematics, volume1
Bell,E,T (1937):Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y
Lanl B.Boyer(1989): History of Mathematics Wiley,N.Y
Bostock&Perkins(1989): Advanced Mathematics, volume2

المشروع

شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع.
ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفّذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخّل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.
٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، **(شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).**
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلّاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. **الأهداف** التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.
٢. **الخطة** من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.
٣. **الأنشطة** التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.
٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التى استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

لجنة المناهج الوزارية

د. صبري صيدم	**د. بصري صالح**	**م. فواز مجاهد**
أ. ثروت زيد	**أ. عزام ابو بكر**	**أ. عبد الحكيم أبو جاموس**
د. شهناز الفار	**د. سمية النخالة**	**م. جهاد دريدي**

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد صالح (منسقاً)	د. معين جبر	د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي	د. عادل فوارعة	أ. وهيب جبر	د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني	د.سعيد عساف	د. محمد مطر	د. علا الخليلي
د. شهناز الفار	د. علي نصار	د. أيمن الأشقر	أ. أرواح كرم
أ.حنان أبو سكران	أ.كوثر عطية	د. وجيه ضاهر	أ. فتحي أبو عودة
د. سمية النخالة	أ. أحمد سياعرة	أ. قيس شبانة	أ. مبارك مبارك
أ. عبد الكريم صالح	أ. أحلام صلاح	أ. نسرين دويكات	أ. نادية جبر
أ. نشأت قاسم			

المشاركون في ورشات عمل من كتاب الرياضيات للصف ثاني عشر الأدبي والشرعي

ابتسام اسليم	سميرة حنيف	مرام شماسنة
أرواح كرم	سناء الأشهب	مرشد شاهين
آسيا العلامي	سهى عودة	منال الصباغ
بيان بشارات	سهيل شبير	نادية زبد
حنان أبو حامد	صلاح الترك	نايف الطيطي
حنين قشوع	عبيدة الأجرب	نجلاء بكيرات
خلود طنوس	عدنان عنبوسي	نداء حسن
خليل محيسن	علي زايد	هاشم عبيد
رائد عبد العال	فوزية عودة	هديل حمودة
رائد ملاك	كريم العارضة	وائل عبيات
رفيق الصيفي	كمال الجمل	وسام موسى
سامر أبو الرب	ليديا جعنينة	وفاء موسى
سامي بدر	محمد الغرباوي	ياسر الساحلي
حاتم الصغير	محمد فايز	

تمت مناقشة الكتاب من قبل معلمين على مستوى مديريات الوطن عبر العديد من الورشات

تَمَّ بِحَمْدِ الله